<u>Exercices sur les variables aléatoires</u>

Exercice 1 :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
On marque 10 points si on a tiré l'as de coeur, 5 points si on a tiré un autre as, 3 points si on a tiré une figure (Valet, Dame ou Roi) et zéro point dans tous les autres cas.
On définit une variable aléatoire X dont la valeur est le nombre de points obtenus.

1) Donner la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance de ce jeu.

Exercice 2 :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. La loi de probabilité de X est précisée dans le tableau suivant, dans lequel a est un nombre.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p\left(X = x_i\right)$	a	2a	3a	4a	5a	7a

1) Calculer a.
2) Le dé est-il truqué.

Exercice 3 :

Ali Baba lance deux fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il appelle S la somme des résultats des deux lancers.
La porte du paradis ne s'ouvrira que si S est un nombre divisible par 6.
Quelle est la probabilité que la porte s'ouvre ?

Exercice 4 :

Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés cubiques chacun numérotés de 1 à 6.
On appelle M la variable aléatoire égale au maximum des résultats des deux dés.
A l'aide d'un tableau à double entrées, déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire M.

1) Donner la loi de probabilité de M.
2) Calculer l'espérance de M.

Exercice 5 :

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public : dans une urne sont placées :

- 2 boules rouges R1 et R2
- 2 boules vertes V1 et V2
- 1 boule blanche B

Ces boules sont indiscernables au toucher.
Le joueur prend une première boule au hasard, puis sans la remettre dans l'urne, il tire une seconde boule.
A la fin de la partie, si la boule blanche a été tirée, le joueur gagne 10 € ; il perd dans les autres cas.
Pour faire une partie, le joueur doit payer 5 €.
On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie, c'est-à-dire la différence entre le gain éventuel et le prix du jeu.

1) Déterminer avec un arbre tous les cas possibles.
2) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
3) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
4) Quelle est l'espérance de ce jeu ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 1 :

1) Les tirages se font « au hasard », on fait donc l'hypothèse d'équiprobabilité, par conséquent, chaque carte a la même probabilité $\frac{1}{32}$ d'être tirée. On a donc :

$$p(\mathrm{X}=10)=p(\text{as de coeur})=\frac{1}{32}$$

$$p(\mathrm{X}=5)=p(\text{as de carreau, as de pique, as de trèfle})=\frac{3}{32}$$

$$p(\mathrm{X}=3)=p(\text{roi, dame ou valet})=\frac{12}{32}$$ →3 figures dans chacune des quatre « couleurs »

$$p(\mathrm{X}=0)=p(\text{dix, neuf, huit ou seot})\ p=\frac{16}{32}$$

On peut définir la loi de probabilité de X :

x_i	0	3	5	10
$p(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{16}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On vérifie que la somme des probabilités $p(\mathrm{X}=x_i)$ vaut 1 :

$$\frac{16}{32}+\frac{12}{32}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32}=\frac{32}{32}=1$$

2) L'espérance est :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=0\times\frac{16}{32}+3\times\frac{12}{32}+5\times\frac{3}{32}+10\times\frac{1}{32}=\frac{36}{32}+\frac{15}{32}+\frac{10}{32}=\frac{61}{32}$$

Exercice 2 :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(\mathrm{X}=x_i)$	a	2a	3a	4a	5a	7a

1) La somme des probabilités doit être égale à 1 donc :

$$a+2a+3a+4a+5a+7a=1$$
$$\Leftrightarrow\ 22a=1$$
$$\Leftrightarrow\ a=\frac{1}{22}$$

2) Les faces ont toutes des probabilités différentes d'apparaître : le dé est truqué.

Exercice 3 :

Ici un tableau à deux entrées est nécessaire pour lister toutes les combinaisons possibles :

→en première ligne, les résultats possibles du dé 1

→en première colonne, les résultats possibles du dé 2

Le tableau comptabilise la somme des deux dés.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

On s'intéresse aux résultats multiples de 6 : soit 6 et 12 → il y en a 6 sur 36.
Probabilité que la porte s'ouvre en utilisant les variables aléatoires :
Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un multiple de 6 et qui vaut 0 dans le cas contraire.
On peut définir la loi de probabilité de X :

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

La probabilité cherchée est l'espérance de X :

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Il a une chance sur 6.

Exercice 4 :

Voici le tableau à double entrées demandées :

→en première ligne, les résultats possibles du dé 1

→en première colonne, les résultats possibles du dé 2

Le tableau indique le plus grand des deux dés.

	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
3	**3**	**3**	**3**	**4**	**5**	**6**
4	**4**	**4**	**4**	**4**	**5**	**6**
5	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**6**
6	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**

La variable aléatoire M peut prendre les valeurs : 1 , 2 , 3 , 4, 5 , 6
Voici la loi de probabilité de M :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(M = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

On vérifie que $\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = \frac{36}{36} = 1$

2) L'espérance est :

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,5$$

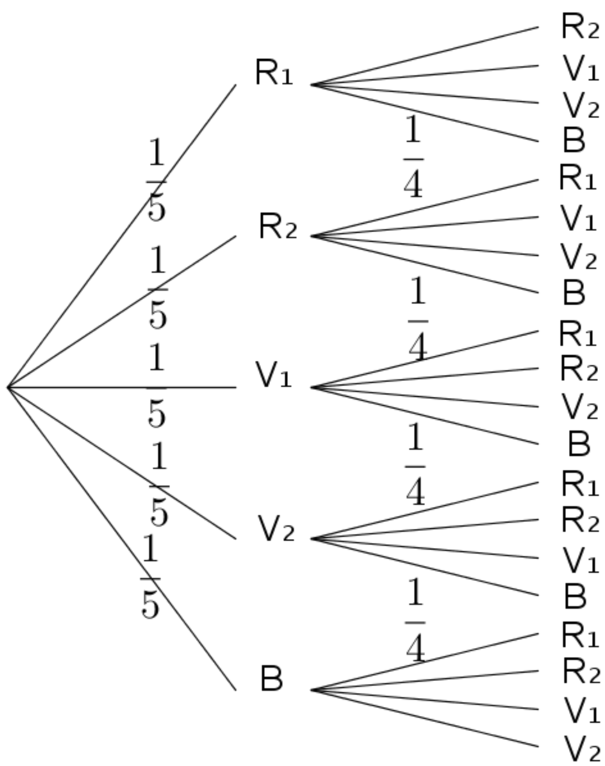
Exercice 5 :

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public : dans une urne sont placées :

- 2 boules rouges R1 et R2
- 2 boules vertes V1 et V2
- 1 boule blanche B

Ces boules sont indiscernables au toucher.
Le joueur prend une première boule au hasard, puis sans la remettre dans l'urne, il tire une seconde boule.
A la fin de la partie, si la boule blanche a été tirée, le joueur gagne 10 € ; il perd dans les autres cas.
Pour faire une partie, le joueur doit payer 5 €.
On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie, c'est-à-dire la différence entre le gain éventuel et le prix du jeu.

1) Arbre représentant tous les cas possibles :



2) En tenant compte de la mise de 5€, les valeurs prises par la variable aléatoire X sont 5 et -5.

3) La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	-5	5
$p(X = x_i)$	$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$	$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

4) Espérance de ce jeu :

$$E(X) = -5 \times \frac{3}{5} + 5 \times \frac{2}{5} = -3 + 2 = -1$$

En moyenne, on perd un euro par partie.