EXERCICE 2C.1

1. Dans un jeu d'argent, on appelle X le gain. Cette variable aléatoire obéit à la loi de probabilité suivante :

Valeurs de X	0	1	10	100
Valeurs de X^2				
$p(X = x_i)$	0,85	0,10	0,04	0,01

a. Déterminer l'espérance mathématique de X.
b. Compléter le tableau puis calculer l'espérance de X^2.
c. En déduire la variance puis l'écart-type de X.

2. Dans un autre jeu d'argent, on appelle Y le gain. Cette variable aléatoire obéit à la loi de probabilité suivante :

Valeurs de Y	1	2	4
Valeurs de Y^2			
$p(X = y_i)$	0,7	0,20	0,10

a. Déterminer l'espérance mathématique de Y.
b. Compléter le tableau puis calculer l'espérance de Y^2.
c. En déduire la variance puis l'écart-type de Y.

3. Dans un autre jeu d'argent, on appelle Z le gain. Cette variable aléatoire obéit à la loi de probabilité suivante :

Valeurs de Z	0	10	10 000
Valeurs de Z^2			
$p(X = z_i)$	0,89995	0,1	0,000 05

a. Déterminer l'espérance mathématique de Z.
b. Compléter le tableau puis calculer l'espérance de Z^2.
c. En déduire la variance puis l'écart-type de Z.

4. Parmi tous ces jeux :
a. Lequel est le plus rentable pour le joueur ?
b. Subjectivement, lequel aura le plus de succès ?

EXERCICE 2C.2

Une entreprise de location dispose d'une flotte de 50 voitures. Une étude statistique a permis de définir la variable aléatoire X qui correspond au nombre de voitures en panne un jour pris au hasard.
Voici la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,04	0,134	0,259	0,349	0,215	0,003

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

EXERCICE 2C.3

Un objet produit en série a un coût de production de 95 euros.
Un objet défectueux à l'issue de sa fabrication peut présenter seulement le défaut A, seulement le défaut B, ou les deux défauts A et B simultanément.
La garantie permet d'effectuer les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

- 10 euros pour le seul défaut A,
- 15 euros pour le seul défaut B,
- 25 euros pour les deux défauts A et B.

1. Sur un lot L de 200 objets prélevés sur l'ensemble de la production, on constate que 16 objets ont au moins le défaut A, 12 objets ont au moins le défaut B et 180 objets n'ont aucun des deux défauts.
a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre d'objets du lot L	Avec le défaut A	Sans le défaut A	TOTAL
Avec le défaut B			
Sans le défaut B			
TOTAL			

b. On prélève au hasard un objet parmi les 200 objets du lot L, décrits précédemment.
Calculer la probabilité p_1 que cet objet ne présente aucun défaut. On donnera la valeur décimale de p_1.
c. On prélève au hasard un objet parmi les 200 objets du lot L, décrits précédemment.
Calculer la probabilité p_2 que cet objet présente seulement le défaut A.
On donnera la valeur décimale de p_2.

2. *Pour la suite de l'exercice, on admettra que, sur l'ensemble de la production, 90% des objets n'ont aucun défaut, 4% des objets ont le seul défaut A. 2% des objets ont le seul défaut B et 4% des objets ont les deux défauts A et B.*
On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard sur l'ensemble de la production, associe son prix de revient, c'est-à-dire le coût de production augmenté éventuellement du coût de réparation.
a. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire X ?
b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. (On pourra présenter cette loi sous la forme d'un tableau,)
c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de cette variable aléatoire X. Que représente-t-elle pour l'usine ?
On admet pour la suite de l'exercice que tous les objets produits sont vendus.
d. L'usine peut-elle espérer faire des bénéfices en vendant 96 euros chaque objet produit ?
e. L'usine veut faire un bénéfice moyen de 10 euros par objet.
Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente d'un objet produit.

CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI MONTPELLIER

EXERCICE 2C.1

1. Dans un jeu d'argent, on appelle X le gain. Cette variable aléatoire obéit à la loi de probabilité suivante :

Valeurs de X	0	1	10	100
Valeurs de X^2	**0**	**1**	**100**	**10000**
$p(X = x_i)$	0,85	0,10	0,04	0,01

a. Déterminer l'espérance mathématique de X.

$E(X) = 0\times 0,85 + 1\times 0,10 + 10\times 0,04 + 100\times 0,01$

$= 0,1 + 0,4 + 1 = 1,5$

b. Compléter le tableau puis calculer l'espérance de X^2.

$E(X^2) = 0,85\times 0^2 + 0,10\times 1^2 + 0,04\times 10^2 + 0,01\times 100^2$

$= 0,1 + 4 + 100 = 104,1$

c. En déduire la variance puis l'écart-type de X.

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 104,1 - 1,5^2 = 101,85$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{101,85} \simeq 10,09$.

Autre méthode :

$V(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i \times (X_i - E(X))^2$

$= 0,85\times(0-1,5)^2 + 0,10\times(1-1,5)^2$

$+ 0,04\times(10-1,5)^2 + 0,01\times(100-1,5)^2$

$= 101,85$

2. Dans un autre jeu d'argent, on appelle Y le gain. Cette variable aléatoire obéit à la loi de probabilité suivante :

Valeurs de Y	1	2	4
Valeurs de Y^2	**1**	**4**	**16**
$p(Y = y_i)$	0,7	0,20	0,10

a. Déterminer l'espérance mathématique de Y.

$E(Y) = 1\times 0,7 + 2\times 0,2 + 4\times 0,1$

$= 0,7 + 0,4 + 0,4 = 1,5$

b. Compléter le tableau puis calculer l'espérance de Y^2.

$E(Y^2) = 0,7\times 1^2 + 0,2\times 2^2 + 0,1\times 4^2$

$= 0,7 + 0,8 + 1,6 = 3,1$

c. En déduire la variance puis l'écart-type de Y.

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 3,1 - 1,5^2 = 0,85$

$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{0,85} \simeq 0,922$

3. Dans un autre jeu d'argent, on appelle Z le gain. Cette variable aléatoire obéit à la loi de probabilité suivante :

Valeurs de Z	0	10	10 000
Valeurs de Z^2	**0**	**100**	**10^8**
$p(Z = z_i)$	0,89995	0,1	0,000 05

a. Déterminer l'espérance mathématique de Z.

$E(Z) = 0\times 0,89995 + 10\times 0,1 + 10000\times 0,00005$

$E(Z) = 1 + 0,5 = 1,5$

b. Compléter le tableau puis calculer l'espérance de Z^2.

$E(Z^2) = 0,89995\times 0^2 + 0,1\times 10^2 + 0,00005\times 10^8$

$E(Z^2) = 10 + 5000 = 5010$

c. En déduire la variance puis l'écart-type de Z.

$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 5010 - 1,5^2 = 5007,75$

$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{5007,75} \simeq 70,77$

4. Parmi tous ces jeux :

a. Lequel est le plus rentable pour le joueur ?

Ils ont tous la même espérance, donc la même rentabilité.

b. Subjectivement, lequel aura le plus de succès ?

Le dernier jeu devrait avoir le plus de succès avec cette possibilité d'empocher 10 000 €.

EXERCICE 2C.2

Une entreprise de location dispose d'une flotte de 50 voitures. Une étude statistique a permis de définir la variable aléatoire X qui correspond au nombre de voitures en panne un jour pris au hasard.

Voici la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0,04	0,134	0,259	0,349	0,215	0,003

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

$E(X) = 0\times 0,04 + 1\times 0,134 + 2\times 0,259 + 3\times 0,349$

$+ 4\times 0,215 + 5\times 0,003$

$E(X) = 0,134 + 0,518 + 1,047 + 0,860 + 0,015 = 2,574$

$E(X^2) = 0,04\times 0^2 + 0,134\times 1^2 + 0,259\times 2^2 + 0,349\times 3^2$

$+ 0,215\times 4^2 + 0,003\times 5^2$

$E(X^2) = 0,134 + 1,036 + 3,141 + 3,440 + 0,075 = 7,826$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 7,826 - 2,574^2 = 1,200524$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,200524} \simeq 1,096$

EXERCICE 2C.3

Un objet produit en série a un coût de production de 95 euros.

Un objet défectueux à l'issue de sa fabrication peut présenter seulement le défaut A, seulement le défaut B, ou les deux défauts A et B simultanément.

La garantie permet d'effectuer les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

- 10 euros pour le seul défaut A,
- 15 euros pour le seul défaut B,
- 25 euros pour les deux défauts A et B.

1. Sur un lot L de 200 objets prélevés sur l'ensemble de la production, on constate que 16 objets ont au moins le défaut A, 12 objets ont au moins le défaut B et 180 objets n'ont aucun des deux défauts.

a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre d'objets du lot L	Avec le défaut A	Sans le défaut A	TOTAL
Avec le défaut B	**8**	**4**	**12**
Sans le défaut B	**8**	**180**	**188**
TOTAL	**16**	**184**	**200**

b. On prélève au hasard un objet parmi les 200 objets du lot L, décrits précédemment.

Calculer la probabilité p_1 que cet objet ne présente aucun défaut. On donnera la valeur décimale de p_1.

$$p_1 = \frac{\text{nombre d'objets sans defauts}}{\text{nombre total d'objets}} = \frac{180}{200} = 0,9$$

c. On prélève au hasard un objet parmi les 200 objets du lot L, décrits précédemment.

Calculer la probabilité p_2 que cet objet présente seulement le défaut A.

On donnera la valeur décimale de p_2.

$$p_2 = \frac{\text{nbre d'objets n'ayant que le défaut A}}{\text{nombre total d'objets}} = \frac{8}{200} = 0,04$$

2. *Pour la suite de l'exercice, on admettra que, sur l'ensemble de la production, 90% des objets n'ont aucun défaut, 4% des objets ont le seul défaut A. 2% des objets ont le seul défaut B et 4% des objets ont les deux défauts A et B.*

On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard sur l'ensemble de la production, associe son prix de revient, c'est-à-dire le coût de production augmenté éventuellement du coût de réparation.

a. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire X ?

Chaque objet produit en série a un coût de production de 95 euros, auquel il faut ajouter son éventuel coût de réparation :

X peut prendre les valeurs 95, 105, 110 et 120 euros en fonction des différents coûts de réparation.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. (On pourra présenter cette loi sous la forme d'un tableau,)

X	95	105	110	120
$p(X)$	0,9	0,04	0,02	0,04

c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de cette variable aléatoire X. Que représente-t-elle pour l'usine ?

$$E(X) = 95\times 0,9 + 105\times 0,04 + 110\times 0,02 + 120\times 0,04$$

$$E(X) = 96,7$$

En moyenne, chaque objet coûte 96,70 euros.

On admet pour la suite de l'exercice que tous les objets produits sont vendus.

d. L'usine peut-elle espérer faire des bénéfices en vendant 96 euros chaque objet produit ?

Si le prix de vente est inférieur au prix de revient, il ne peut y avoir de bénéfice.

e. L'usine veut faire un bénéfice moyen de 10 euros par objet.

Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente d'un objet produit.

Le prix de vente doit simplement être supérieur de 10 euros au prix de revient ; soit : 106,70 euros.