Exercices du lycée d'Adultes de Paris - Répétition d'épreuves

Exercice 1

Pour un archer, la probabilité d'atteindre une cible est de 0,8. Il lance une volée de trois flèches et on suppose les tirs indépendants. Quelle est la probabilité :

1) que toutes les flèches ratent la cible ?
2) qu'au moins une flèche soit dans la cible ?

Exercice 2

On lance trois fois une pièce bien équilibrée. On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

On considère le jeu suivant :

- si 1 sort au premier lancer, on gagne 1€ ;
- sinon, s'il sort au deuxième lancer, on gagne 2 € ;
- sinon, s'il sort au troisième lancer, on gagne 4 € ;
- enfin, s'il n'est pas sorti, on perd *n* €.

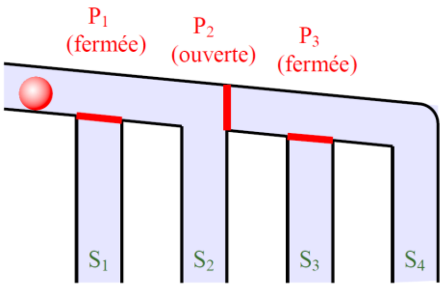
On appelle G la variable aléatoire donnant le gain algébrique.

1) Déterminer la loi de probabilité de G.
2) Comment choisir *n* pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 3

Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine. Cette machine possède trois portes P_1, P_2 et P_3 qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles S_1, S_2, S_3 et S_4.

Un système électronique positionne de façon aléatoire ces trois portes en position "*ouvertes*" ou "*fermée*" indépendamment les unes des autres.



Pour jouer, on doit miser 7 €.

Si la bille sort en S_1, on ne reçoit rien, sinon, si elle sort par S_2, on reçoit 5 €, par S_3, on reçoit 10 € et par S_4, on reçoit 20 €.

X est la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain algébrique du joueur.

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
2) a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer E(X).
   c) Comment modifier le montant de la mise pour que ce jeu soit équitable ?

Exercice 1

Pour un archer, la probabilité d'atteindre une cible est de 0,8. Il lance une volée de trois flèches et on suppose les tirs indépendants. Quelle est la probabilité :

1) *que toutes les flèches ratent la cible ?*
2) *qu'au moins une flèche soit dans la cible ?*

Soit F l'évènement « la flèche atteint sa cible ».

Un arbre pondéré est indispensable pour bien apprécier la situation :

1) Probabilité qu'aucune flèche atteigne la cible.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de flèches atteignant la cible.

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.

$$p(X=0)=p\left(\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\cap\overline{F_2}\right)$$

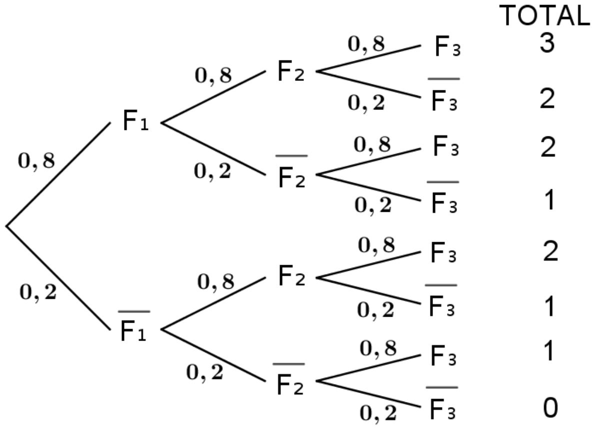
$$=0,2\times0,2\times0,2=0,008$$

2) Probabilité qu'au moins une flèche atteigne la cible.

$$p(X\geq1)=1-p(X=0)$$

$$=1-0,008$$

$$=0,992$$



Exercice 2

On lance trois fois une pièce bien équilibrée. On décide de coder Pile par 1 et Face par 0.

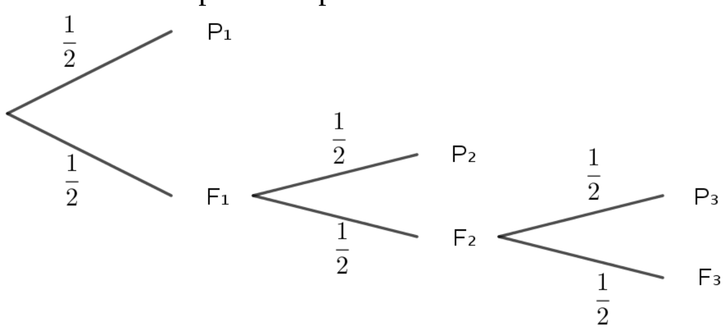
On considère le jeu suivant :

- *si 1 sort au premier lancer, on gagne 1€ ;*
- *sinon, s'il sort au deuxième lancer, on gagne 2 € ;*
- *sinon, s'il sort au troisième lancer, on gagne 4 € ;*
- *enfin, s'il n'est pas sorti, on perd n €.*

On appelle G la variable aléatoire donnant le gain algébrique.

1) *Déterminer la loi de probabilité de G.*

Un arbre pondéré est indispensable pour bien visualiser la situation :



La variable aléatoire G peut prendre les valeurs 1, 2, 4 et *n*.

$$p(G=1)=p(P_1)=\frac{1}{2}$$

$$p(G=2)=p(F_1\cap P_2)=p(F_1)\times p_{F_1}(P_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$p(G=4)=p(F_1\cap F_2\cap P_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$p(G=n)=1-p(G=1)-p(G=2)-p(G=4)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

On obtient la loi de probabilité de G :

G	n	1	2	4	total
$p(\text{G})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{8}$

2) *Comment choisir n pour que le jeu soit équitable ?*

On cherche n tel que $E(\text{G})=0$:

$$\frac{1}{8}\times n+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad n+4+4+4=0$$

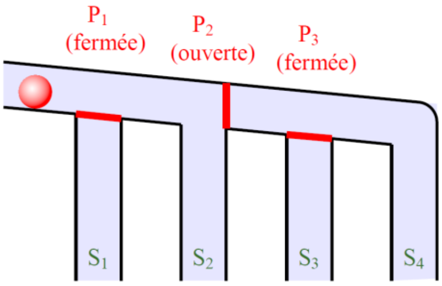
$$\Leftrightarrow \quad n=-12$$

La mise doit être égale à 12 € pour que le jeu soit équitable.

Exercice 3

Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine. Cette machine possède trois portes P_1, P_2 *et* P_3 *qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles* S_1, S_2, S_3 *et* S_4.

Un système électronique positionne de façon aléatoire ces trois portes en position "ouvertes" ou "fermée" indépendamment les unes des autres.



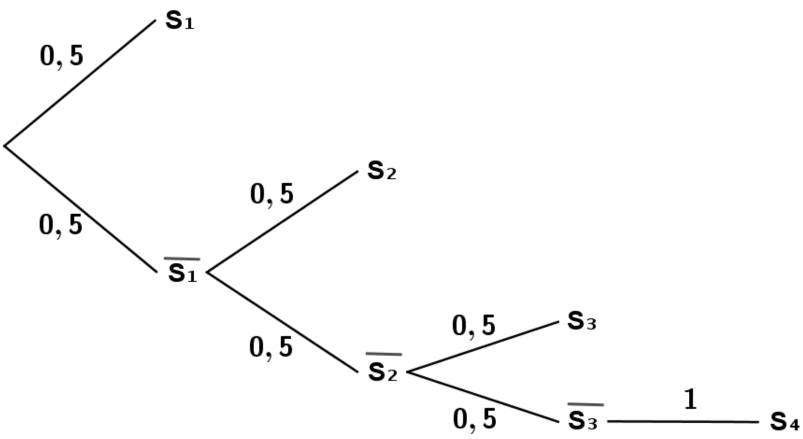
Pour jouer, on doit miser 7 €.

Si la bille sort en S_1, *on ne reçoit rien, sinon, si elle sort par* S_2, *on reçoit 5 €, par* S_3, *on reçoit 10 € et par* S_4, *on reçoit 20 €.*

X est la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain algébrique du joueur.

1) *Représenter la situation par un arbre pondéré.*

Les quatre portes s'ouvrent de manière aléatoire donc leur probabilité d'ouverture est égale à 0,5.



2) a) *Déterminer la loi de probabilité de X.*

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs : -7, -2 , 3 et 13.

$$p(\text{X}=-7)=p(\text{S}_1)=\frac{1}{2}$$

$$p(\text{X}=-2)=p\left(\overline{\text{S}_1}\cap\text{S}_2\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$p(\text{X}=3)=p\left(\overline{\text{S}_1}\cap\overline{\text{S}_2}\cap\text{S}_3\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$p(\mathrm{X}=13)=p\left(\overline{\mathrm{S}_1}\cap\overline{\mathrm{S}_2}\cap\overline{\mathrm{S}_3}\cap\mathrm{S}_4\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{8}$$

On obtient la loi de probabilité de X :

X	-7	-2	3	13	total
$p(\mathrm{X})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{8}$

b) *Calculer E(X).*

$$\begin{aligned}E(\mathrm{X})&=\frac{1}{2}\times(-7)+\frac{1}{4}\times(-2)+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{8}\times13\\&=\frac{-7}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{13}{8}\\&=\frac{-28}{8}-\frac{4}{8}+\frac{3}{8}+\frac{13}{8}\\&=\frac{-16}{8}=-2\end{aligned}$$

c) *Comment modifier le montant de la mise pour que ce jeu soit équitable ?*

Si l'on définit une nouvelle variable aléatoire $\mathrm{Y}=\mathrm{X}+2$**, alors** $E(\mathrm{Y})=E(\mathrm{X})+2=0$**.**

Y	-5	0	5	15	total
$p(\mathrm{X})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{8}$

→la mise doit donc être de 5 € (au lieu de 7 €).

$$\begin{aligned}E(\mathrm{Y})=E(\mathrm{X}+2)&=\frac{1}{2}\times(-7+2)+\frac{1}{4}\times(-2+2)+\frac{1}{8}\times(3+2)+\frac{1}{8}\times(13+2)\\&=\frac{1}{2}\times(-7)+\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{4}\times(-2)+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{8}\times2+\frac{1}{8}\times13+\frac{1}{8}\times2\\&=\left[\frac{1}{2}\times(-7)+\frac{1}{4}\times(-2)+\frac{1}{8}\times3+\frac{1}{8}\times13\right]+\left[\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{8}\times2+\frac{1}{8}\times2\right]\\&=E(\mathrm{X})+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\\&=E(\mathrm{X})+2\end{aligned}$$

Autre méthode :

Soit x la nouvelle mise recherchée.

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs : $-x$, $5-x$, $10-x$ et $20-x$.

La loi de probabilité de X devient :

X	$-x$	$5-x$	$10-x$	$20-x$	total
$p(\mathrm{X})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{8}$

Le jeu est équitable si :

$$\begin{aligned}E(\mathrm{X})=0\quad&\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2}\times(-x)+\frac{1}{4}\times(5-x)+\frac{1}{8}\times(10-x)+\frac{1}{8}\times(20-x)=0\\&\Leftrightarrow\quad\frac{-x}{2}+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}x+\frac{10}{8}-\frac{1}{8}x+\frac{20}{8}-\frac{1}{8}x=0\\&\Leftrightarrow\quad\frac{-8x}{8}+\frac{40}{8}=0\\&\Leftrightarrow\quad -x+5=0\\&\Leftrightarrow\quad x=5\end{aligned}$$

→la mise doit donc être de 5 €.