Exercice 2C.1 :

Etudier le sens de variation de suites définies par une expression :

a) $u_n = n^2 - 6n + 5$ pour $n \geq 0$

b) $u_n = 2 - \dfrac{7}{4n}$ pour $n \geq 1$

c) $u_n = 9 + 8n - n^2$ pour $n \geq 0$

d) $u_n = \dfrac{2}{5n} + 1$ pour $n \geq 1$

e) $u_n = \dfrac{5n^2}{4^n}$ pour $n \geq 0$

f) $u_n = \dfrac{n^n}{2^{n^2}}$ pour $n \geq 0$ (*Terminale*)

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 2C.1 : *Etudier le sens de variation de suites définies par une expression :*

a) $u_n = n^2 - 6n + 5$ pour $n \geq 0$

1ère méthode :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 6(n+1) + 5 - \left(n^2 - 6n + 5\right) = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 5 - n^2 + 6n - 5 = 2n - 5$$

Or $2n - 5 > 0 \Leftrightarrow 2n > 5 \Leftrightarrow n > \dfrac{5}{2}$

Donc si $n \geq 3$: $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

2ème méthode :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 - 6(n+1) + 5}{n^2 - 6n + 5} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 5}{n^2 - 6n + 5} = \frac{n^2 - 4n}{n^2 - 6n + 5} = \frac{n^2 - 4n - 2n + 5 + 2n - 5}{n^2 - 6n + 5}$$

$$= \frac{n^2 - 6n + 5}{n^2 - 6n + 5} + \frac{2n - 5}{n^2 - 6n + 5} = 1 + \frac{2n - 5}{n^2 - 6n + 5}$$

Etude du numérateur : $2n - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2n \geq 5 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{5}{2}$

Etude du dénominateur : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 36 - 20 = 16 = 4^2$ donc deux racines :

$$n_1 = \frac{-(-6) - 4}{2} = \frac{6 - 4}{2} = 1 \text{ et } n_2 = \frac{-(-6) + 4}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

$a = 1$ donc la parabole est orientée « vers le haut avec $n \geq 0$:

$n^2 - 6n + 5 > 0$ si : $n < 1$ ou $n > 5$

$n^2 - 6n + 5 < 0$ si : $1 < n < 5$

Tableau de signe :

n	0	1	$\frac{5}{2}$	5	$+\infty$
$2n - 5$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$n^2 - 6n + 5$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$\dfrac{2n - 5}{n^2 - 6n + 5}$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Ainsi : si $n \geq 5$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite (u_n), positive, est croissante. Si $n \leq 1$: (u_n) est négative.

3ème méthode : avec la fonction associée

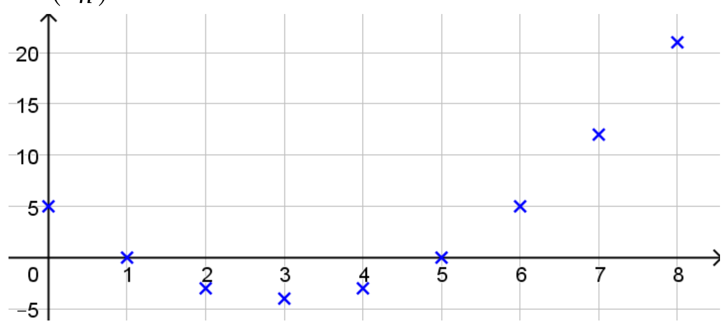
La fonction associée est : $f(x) = x^2 - 6x + 5$

$a = 1$ donc la parabole est orientée « vers le haut ».

L'abscisse de son sommet est : $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2 \times 1} = 3$

Si $x \geq 3$: la fonction *f* est croissante

Donc si $n \geq 3$: la suite (u_n) est croissante



b) $u_n = 2-\dfrac{7}{4n}$ pour $n\geq 1$

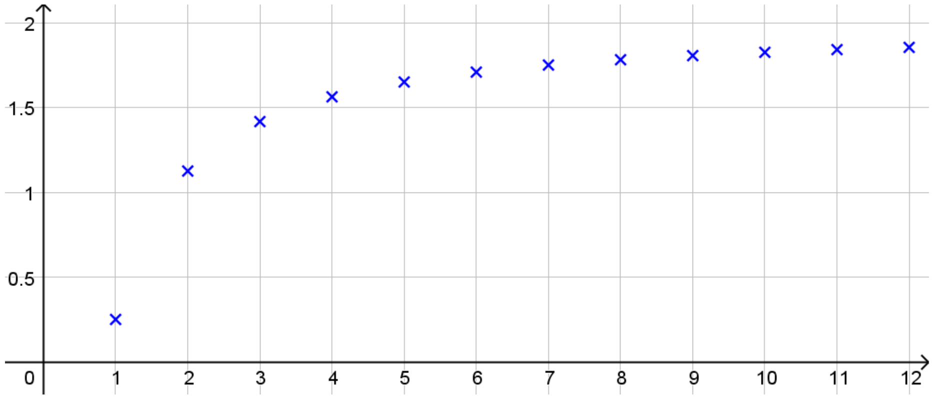
1ère méthode :

$$u_{n+1}-u_n = 2-\frac{7}{4(n+1)}-\left(2-\frac{7}{4n}\right) = 2-\frac{7}{4(n+1)}-2+\frac{7}{4n} = -\frac{7}{4(n+1)}\times\frac{n}{n}+\frac{7}{4n}\times\frac{n+1}{n+1}$$

$$= \frac{-7n}{4n(n+1)}+\frac{7(n+1)}{4n(n+1)} = \frac{-7n+7n+7}{4n(n+1)} = \frac{7}{4n(n+1)}$$

Or $n\geq 1 \Leftrightarrow n+1\geq 2$ donc : $4n(n+1)\geq 1$ et $\dfrac{7}{4n(n+1)}\geq 0$.

Donc si $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite (u_n) est croissante.



2ème méthode :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2-\dfrac{7}{4(n+1)}}{2-\dfrac{7}{4n}} = \frac{\dfrac{2\times 4(n+1)}{4(n+1)}-\dfrac{7}{4(n+1)}}{\dfrac{2\times 4n}{4n}-\dfrac{7}{4n}} = \frac{\dfrac{8n+8-7}{4(n+1)}}{\dfrac{8n-7}{4n}} = \frac{8n+1}{4(n+1)}\times\frac{4n}{8n-7} = \frac{\boxed{4}\left(8n^2+n\right)}{\boxed{4}(n+1)(8n-7)}$$

$$= \frac{8n^2+n}{8n^2-7n+8n-7} = \frac{8n^2+n}{8n^2+n-7} = \frac{8n^2+n-7+7}{8n^2+n-7} = \frac{8n^2+n-7}{8n^2+n-7}+\frac{7}{8n^2+n-7} = 1+\frac{7}{8n^2+n-7}$$

Etude du dénominateur : $\Delta = 1^2-4\times 8\times(-7) = 1+224 = 225 = 15^2$ donc deux racines :

$n_1 = \dfrac{-1-15}{2\times 8} = \dfrac{-16}{16} = -1$ et $n_2 = \dfrac{-1+15}{2\times 8} = \dfrac{14}{16} = \dfrac{7}{8} = 0{,}875$

$a=8$ donc la parabole est orientée « vers le haut avec $n\geq 1$:

$8n^2+n-7>0$ si $n\geq 1$

Ainsi si $n\geq 1$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ et la suite (u_n), positive, est croissante.

3ème méthode : avec la fonction associée

La fonction associée est : $f(x) = 2-\dfrac{7}{4x} = 2-\dfrac{7}{4}\times\dfrac{1}{x}$

Sa dérivée est : $f'(x) = -\dfrac{7}{4}\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{7}{4x^2}$

La dérivée est strictement positive pour tout réel $x>0$ et la fonction *f* est croissante.
Donc si $n\geq 1$: la suite (u_n) est croissante.

c) $u_n = 9+8n-n^2$ pour $n \geq 0$

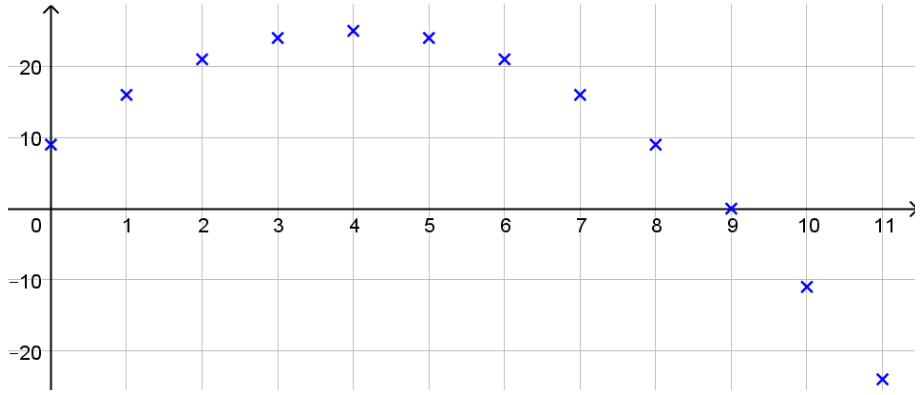
1ère méthode :

$$u_{n+1}-u_n = 9+8(n+1)-(n+1)^2-\left(9+8n-n^2\right) = 9+8n+8-n^2-2n-1-9-8n+n^2 = -2n+7$$

Or $-2n+7>0 \iff -2n>-7 \iff n<\dfrac{-7}{-2} \iff n<\dfrac{7}{2}$

Donc : si $n \leq 3$: $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite (u_n) est croissante.

si $n \geq 4$: $u_{n+1}-u_n<0$ et la suite (u_n) est décroissante.



2ème méthode : trop laborieuse, à éviter, surtout avec une suite dont certains sont négatifs.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9+8(n+1)-(n+1)^2}{9+8n-n^2} = \frac{9+8n+8-n^2-2n-1}{9+8n-n^2} = \frac{-n^2+6n+16}{-n^2+8n+9} = \frac{-n^2+6n+16+2n-7-2n+7}{-n^2+8n+9}$$

$$= \frac{-n^2+8n+9-2n+7}{-n^2+8n+9} = \frac{-n^2+8n+9}{-n^2+8n+9}+\frac{-2n+7}{-n^2+8n+9} = 1+\frac{-2n+7}{-n^2+8n+9}$$

Etude du numérateur : $7-2n \geq 0 \iff -2n \geq -7 \iff n \leq \dfrac{7}{2}$

Etude du dénominateur : $\Delta = 8^2-4\times(-1)\times 9 = 64+36 = 100 = 10^2$ donc deux racines :

$$n_1 = \frac{-8-10}{2\times(-1)} = \frac{-18}{-2} = 9 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-8+10}{2\times(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$a=-1$ donc la parabole est orientée « vers le bas avec $n \geq 0$:

$9+8n-n^2>0$ si : $n<9$

$9+8n-n^2<0$ si : $n>9$

Tableau de signe :

n	0		$\frac{7}{2}$		9		$+\infty$
$-2n+7$		$+$		$-$		$-$	
$-n^2+8n+9$		$+$		$+$		$-$	
$\dfrac{-2n+7}{-n^2+8n+9}$		$+$		$-$		$+$	

Ainsi : si $n \geq 9$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ et la suite (u_n) est négative et décroissante. (hors programme)

3ème méthode : avec la fonction associée

La fonction associée est : $f(x) = 9+8x-x^2 = -x^2+8x+9$

$a=-1$ donc la parabole est orientée « vers le bas » et 'abscisse de son sommet est : $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{2\times(-1)} = 4$

Si $x \geq 4$: la fonction *f* est décroissante, donc si $n \geq 4$: la suite (u_n) est décroissante.

d) $u_n = \dfrac{2}{5n} + 1$ pour $n \geq 1$

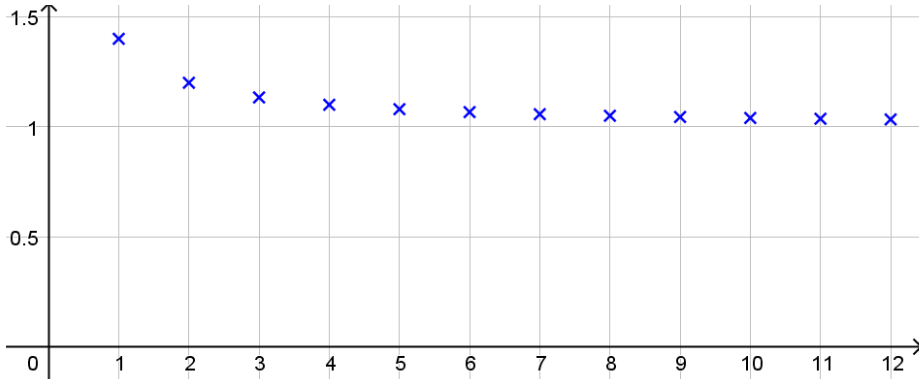
1ère méthode :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5(n+1)} + 1 - \left(\frac{2}{5n} + 1\right) = \frac{2}{5(n+1)} - \frac{2}{5n} = \frac{2}{5(n+1)} \times \frac{n}{n} - \frac{2}{5n} \times \frac{n+1}{n+1}$$

$$= \frac{2n}{5n(n+1)} - \frac{2(n+1)}{5n(n+1)} = \frac{2n-(2n+1)}{5n(n+1)} = \frac{-2}{5n(n+1)}$$

Or $n \geq 1 \Leftrightarrow n+1 \geq 2$ donc : $5n(n+1) \geq 1$ et $\dfrac{-2}{5n(n+1)} \leq 0$.

Donc si $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.



2ème méthode :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{5(n+1)} + 1}{\frac{2}{5n} + 1} = \frac{\frac{2}{5(n+1)} + \frac{5(n+1)}{5(n+1)}}{\frac{2}{5n} + \frac{5n}{5n}} = \frac{\frac{2+(5n+5)}{5(n+1)}}{\frac{2+5n}{5n}} = \frac{\frac{2+5n+5}{5(n+1)}}{\frac{2+5n}{5n}} = \frac{5n+7}{\boxed{5}(n+1)} \times \frac{\boxed{5}n}{2+5n}$$

$$= \frac{5n^2+7n}{2n+2+5n^2+5n} = \frac{5n^2+7n}{5n^2+7n+2} = \frac{5n^2+7n+2}{5n^2+7n+2} - \frac{2}{5n^2+7n+2} = 1 - \frac{2}{5n^2+7n+2}$$

Etude du dénominateur : $\Delta = 7^2 - 4 \times 5 \times 2 = 49 - 40 = 9 = 3^2$ donc deux racines :

$n_1 = \dfrac{-7-3}{2 \times 5} = \dfrac{-10}{10} = -1$ et $n_2 = \dfrac{-7+3}{2 \times 5} = \dfrac{-4}{10} = -0,4$

$a = 5$ donc la parabole est orientée « vers le haut avec $n \geq 1$:

$5n^2 + 7n + 2 > 0$ si $n \geq 1$

Ainsi si $n \geq 1$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et la suite (u_n), positive, est décroissante.

3ème méthode : avec la fonction associée

La fonction associée est : $f(x) = \dfrac{2}{5x} + 1$

Sa dérivée est : $f'(x) = \dfrac{2}{5} \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-2}{5x^2}$

La dérivée est strictement négative pour tout réel $x > 0$ et la fonction f est décroissante.
Donc si $n \geq 1$: la suite (u_n) est décroissante.

e) $u_n = \dfrac{5n^2}{4^n}$ pour $n \geq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{5(n+1)^2}{4^{n+1}}}{\dfrac{5n^2}{4^n}} = \frac{5(n+1)^2}{4^{n+1}} \times \frac{4^n}{5n^2} = \frac{\boxed{5}(n+1)^2}{\boxed{5}n^2} \times \frac{4^n}{4^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{\boxed{4^n}}{4 \times \boxed{4^n}} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2}$$

On pressent que la suite va être décroissante :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \iff \frac{n^2+2n+1}{4n^2} < 1 \iff n^2+2n+1 < 4n^2 \iff 0 < 4n^2 - n^2 - 2n - 1$$

$$\iff 3n^2 - 2n - 1 > 0$$

Discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 = 4^2$$

$\Delta > 0$ donc deux racines :

$$n_1 = \frac{2-4}{2 \times 3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{2+4}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$$

$a = 3$ donc la parabole est « orientée vers le haut ».

Pour tout $n > 1$:

$$3n^2 - 2n - 1 > 0 \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

La suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

f) $u_n = \dfrac{n^n}{2^{n^2}}$ pour $n \geq 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{(n+1)^2}}}{\dfrac{n^n}{2^{n^2}}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{(n+1)^2}} \times \frac{2^{n^2}}{n^n} = \frac{(n+1)\times(n+1)^n}{n^n} \times \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} = (n+1)\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times 2^{n^2-(n+1)^2}$$

$$= (n+1)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times 2^{n^2-(n^2+2n+1)} = (n+1)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times 2^{-2n-1} = (n+1)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{n+1}{2^{2n+1}}$$

On verra en terminale que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \simeq 2{,}718281828$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2^{2n+1}} \simeq 0$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ avec $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$.

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.