Notre Dame de La Merci – Montpellier

Nombre dérivé d'une fonction

Exercice 3B.1 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=3x^2+1$.

Déterminer $f'(2)$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x=2$.

Exercice 3B.2 :

Soit la fonction g définie par $g(x)=\frac{5}{x}-1$.

Déterminer $g'(1)$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x=1$.

Exercice 3B.3 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2+3x-4$.

Déterminer $f'(-1)$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x=-1$.

Exercice 3B.1 :

Soit la fonction f *définie par* $f(x)=3x^2+1$.

Déterminer $f'(2)$ *le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant la fonction* f *au point d'abscisse* $x=2$.

$$f(2)=3\times 2^2+1=3\times 4+1=13$$

Deux méthodes : $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ ou $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

Première méthode :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{3\times(2+h)^2+1-13}{h}=\frac{3\times\left(4+4h+h^2\right)-12}{h}=\frac{12+12h+3h^2-12}{h}$$

$$=\frac{12h+3h^2}{h}=\frac{12\times h+3h\times h}{h}=\frac{(12+3h)\times\boxed{h}}{\boxed{h}}=12+3h$$

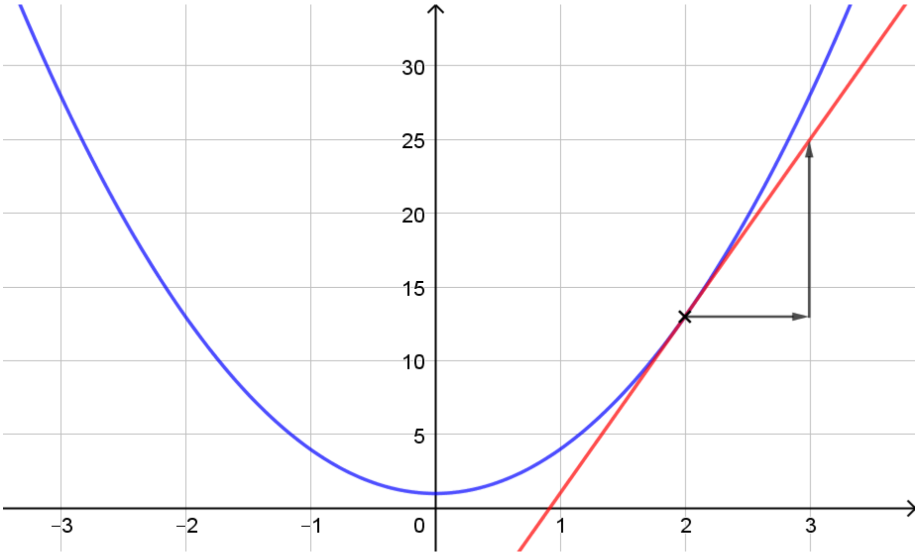
→ $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}12+3h=12$

Deuxième méthode :

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3x^2+1-13}{x-2}=\frac{3x^2-12}{x-2}=\frac{3\times x^2-3\times 4}{x-2}=\frac{3\left(x^2-4\right)}{x-2}=\frac{3\left(x^2-2^2\right)}{x-2}$$

$$=\frac{3(x+2)(x-2)}{x-2}=3(x+2)$$

→ $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}3(x+2)=3\times(2+2)=12$



Exercice 3B.2 :

Soit la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{5}{x}-1$.

Déterminer $g'(1)$ *le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant la fonction* f *au point d'abscisse* $x=1$.

$$g(1)=\frac{5}{1}-1=5-1=4$$

Deux méthodes : $g'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ ou $g'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

Première méthode :

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{\frac{5}{1+h}-1-4}{h}=\frac{\frac{5}{1+h}-5}{h}=\frac{\frac{5}{1+h}-5\times\frac{1+h}{1+h}}{h}=\frac{\frac{5}{1+h}-\frac{5+5h}{1+h}}{h}=\frac{\frac{5-(5+5h)}{1+h}}{h}$$

$$=\frac{\frac{5-5-5h}{1+h}}{h}=\frac{\frac{-5h}{1+h}}{\frac{h}{1}}=\frac{-5h}{1+h}\times\frac{1}{h}=\frac{-5\times\boxed{h}}{(1+h)\times\boxed{h}}=\frac{-5}{1+h}$$

→ $g'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}==\lim\limits_{h\to 0}\frac{-5}{1+h}=-5$

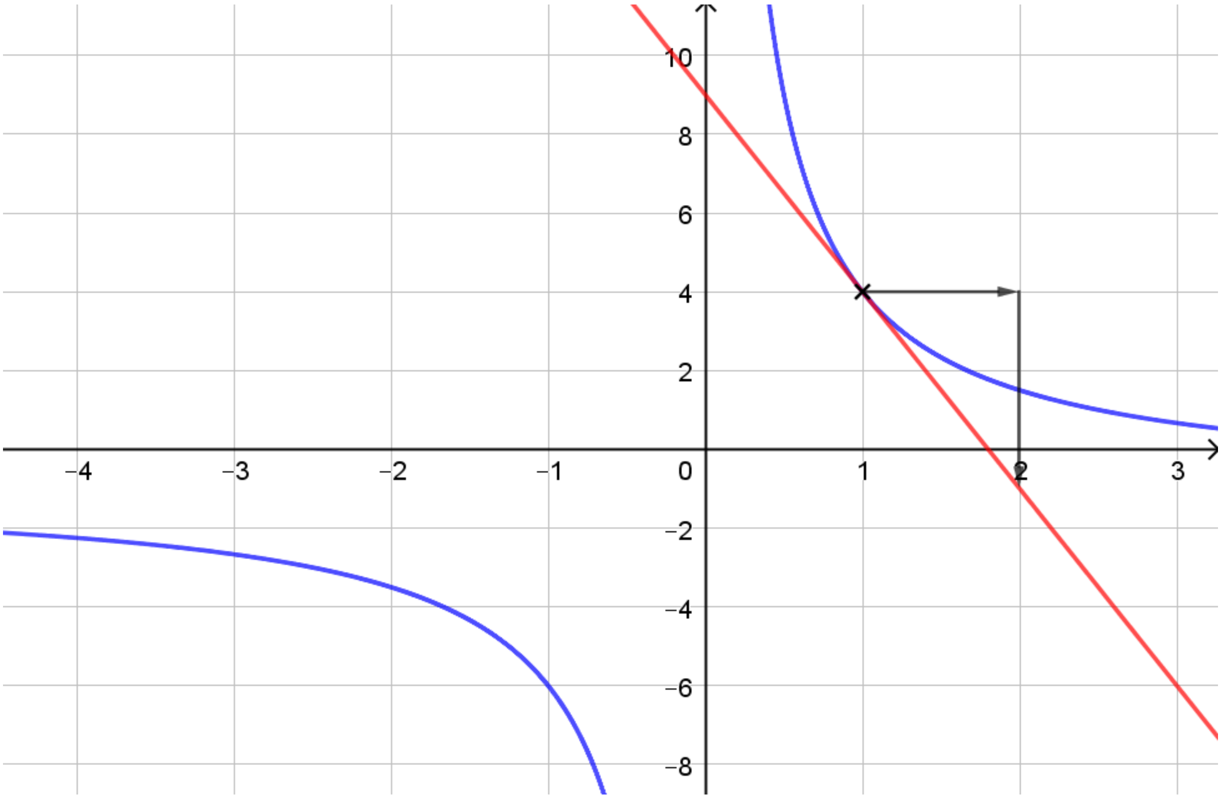
Deuxième méthode :

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{\frac{5}{x}-1-4}{x-1}=\frac{\frac{5}{x}-5}{x-1}=\frac{\frac{5}{x}-5\times\frac{x}{x}}{x-1}=\frac{\frac{5}{x}-\frac{5x}{x}}{x-1}=\frac{\frac{5-5x}{x}}{\frac{x-1}{1}}=\frac{5(1-x)}{x}\times\frac{1}{x-1}$$

Or : $(1-x)=-(-1+x)=-(x-1)$ donc :

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{-5(x-1)}{x(x-1)}=\frac{-5}{x}$$

→ $g'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-5}{x}=\frac{-5}{1}=-5$



Exercice 3B.3 :

Soit la fonction f *définie par* $f(x)=x^2+3x-4$.

Déterminer $f'(-1)$ *le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant la fonction* f *au point d'abscisse* $x=-1$.

$$f(-1)=(-1)^2+3\times(-1)-4=1-3-4=-6$$

Deux méthodes : $f'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ ou $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$

Première méthode :

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{(-1+h)^2+3\times(-1+h)-4-(-6)}{h}=\frac{1-2h+h^2-3+3h-4+6}{h}$$

$$=\frac{h^2+h}{h}=\frac{h\times h+h\times 1}{h}=\frac{\boxed{h}\times(h+1)}{\boxed{h}}=h+1$$

→ $f'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h+1=1$

Deuxième méthode :

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\frac{x^2+3x-4-(-6)}{x+1}=\frac{x^2+3x-4+6}{x+1}=\frac{x^2+3x+2}{x+1}$$

$\Delta=3^2-4\times 1\times 2=9-8=1=1^2$ → $\Delta>0$ donc deux racines :

$x_1=\dfrac{-3-1}{2\times 1}=\dfrac{-4}{2}=-2$ et $x_2=\dfrac{-3+1}{2\times 1}=\dfrac{-2}{2}=-1$

En factorisant : $x^2+3x+2=1(x+2)(x+1)=(x+2)(x+1)$

Ainsi : $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\dfrac{(x+2)(x+1)}{x+1}=x+2$

→ $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}x+2=-1+2=1$