Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercices sur les équations de tangentes par limite du taux d'accroissement

Exercice 4A.1 : Les fonctions carrées mènent à des identités remarquables

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 - 3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction *f* au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice 4A.2 : Les fonctions inverses mènent à des identités remarquables

Soit la fonction *g* définie par $g(x) = \frac{1}{x} + 2$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction *g* au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice 4A.3 : Les fonctions avec racine carrée nécessitent la forme conjuguée

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction *f* au point d'abscisse $x = 3$.

Exercice 4A.4 : Les fonctions carrées mènent à des identités remarquables

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 + x - 3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction *f* au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice 4A.5 :

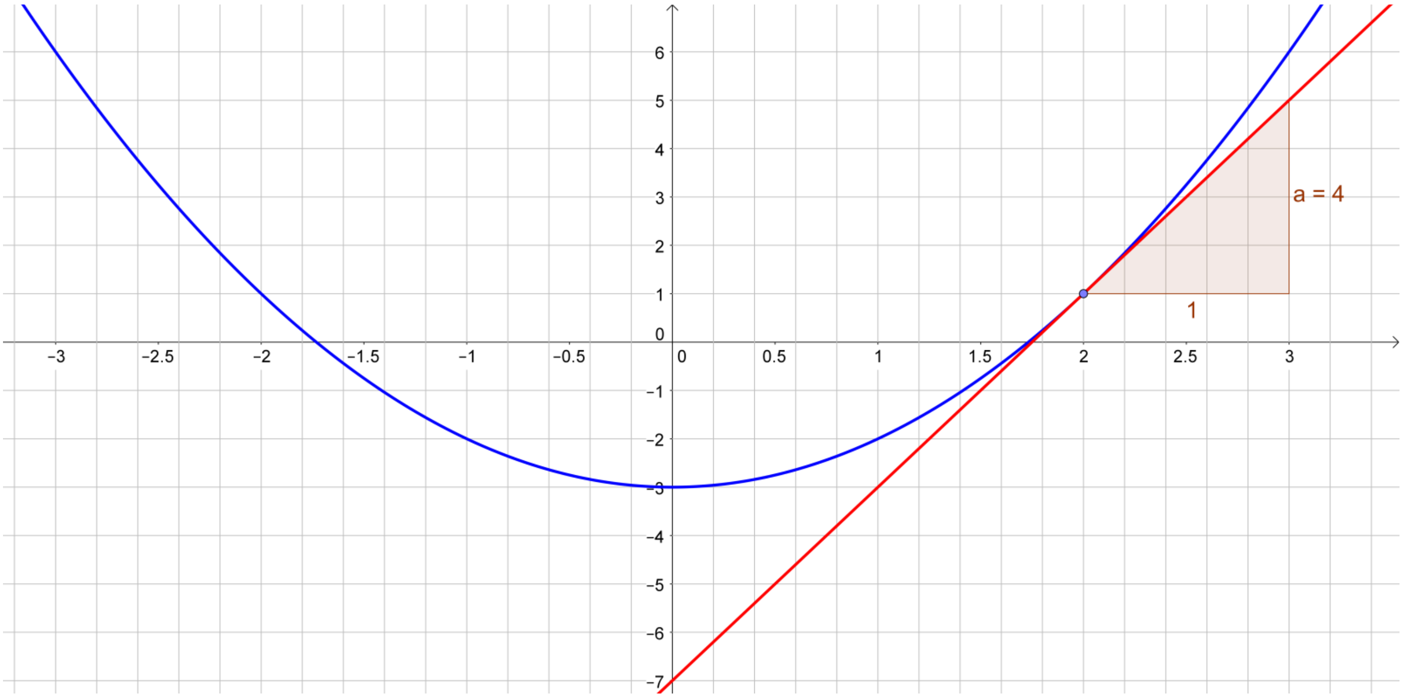
Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{1}{x} + x$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction *f* au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice 4A.1 : Les fonctions carrées mènent à des identités remarquables

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 - 3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse $x = 2$.



Equation de la tangente : $y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$

1) Calculer $f(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

2) Détermination du coefficient directeur de la tangente par passage à la limite : DEUX METHODES

a) $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{\left[(2+h)^2 - 3\right] - 1}{h} = \dfrac{\left[4 + 4h + h^2 - 3\right] - 1}{h} = \dfrac{4 + 4h + h^2 - 3 - 1}{h} = \dfrac{4h + h^2}{h} = 4 + h$

→ $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} 4 + h = 4$

b) $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 3 - 1}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = x + 2$

→ $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

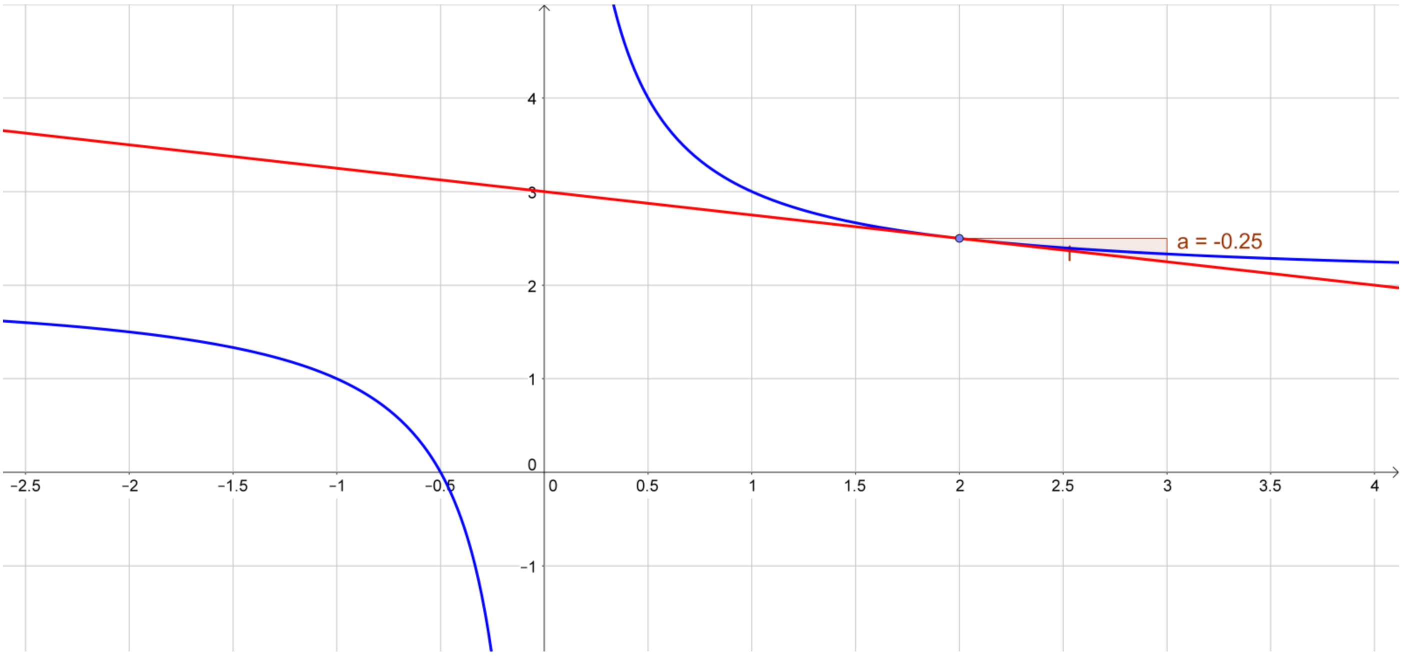
3) Formule de la tangente en $x = 2$:

$$T : y = f'(2)(x-2) + f(2) = 4(x-2) + 1 = 4x - 8 + 1 = 4x - 7$$

Exercice 4A.2 : Les fonctions inverses mènent à des identités remarquables

Soit la fonction g définie par $g(x)=\frac{1}{x}+2$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction g au point d'abscisse $x=2$.



Equation de la tangente : $y=g'(2)\times(x-2)+g(2)$

1) Calculer $g(2)=\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$

2) Détermination du coefficient directeur de la tangente par passage à la limite : DEUX METHODES

a) $$\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\frac{\left(\frac{1}{2+h}+2\right)-\frac{5}{2}}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}+\frac{4}{2}-\frac{5}{2}}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}\times\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{2+h}{2+h}}{h}$$

$$=\frac{\frac{2}{(2+h)\times 2}-\frac{2+h}{2\times(2+h)}}{h}=\frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h}=\frac{\frac{2-2-h}{2(2+h)}}{h}=\frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{\frac{h}{1}}=\frac{-h}{2(2+h)}\times\frac{1}{h}=\frac{-1}{2(2+h)}$$

$$\rightarrow g'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$$

b) $$\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{2}-\frac{5}{2}}{x-2}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\frac{\frac{1\times 2}{x\times 2}-\frac{1\times x}{2\times x}}{x-2}=\frac{\frac{2}{2x}-\frac{x}{2x}}{x-2}=\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}=\frac{2-x}{2x}\times\frac{1}{x-2}=\frac{-(x-2)}{2x(x-2)}=\frac{-1}{2x}$$

$$\rightarrow g'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{4}$$

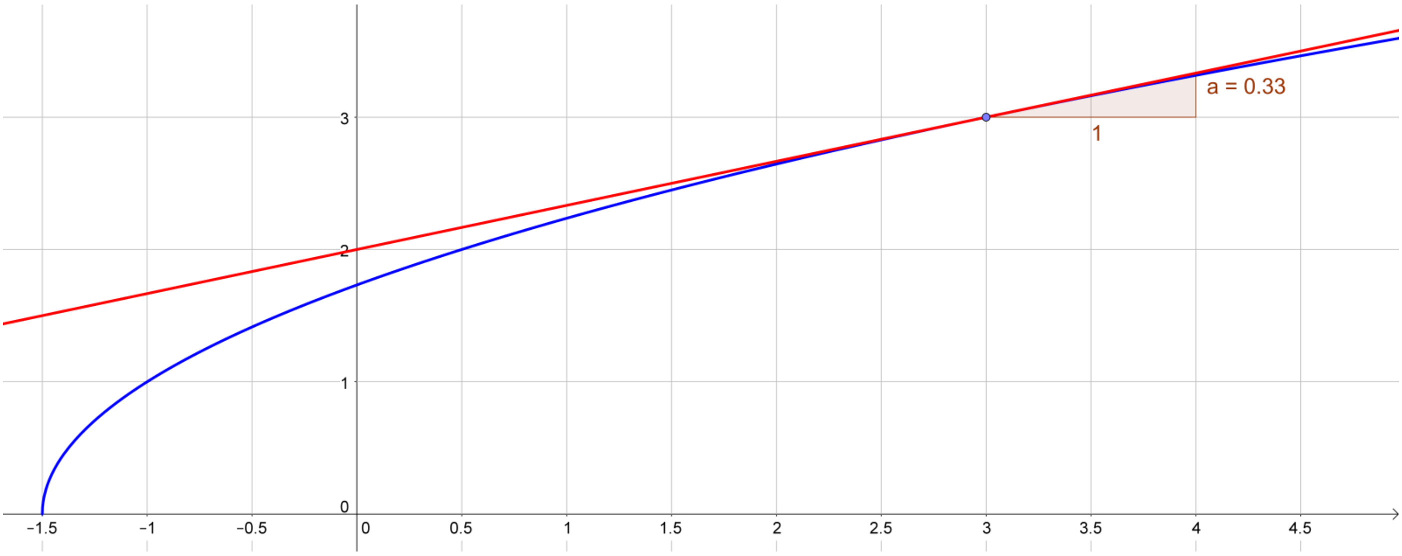
3) Formule de la tangente en $x=2$:

$$T:\ y=g'(2)(x-2)+g(2)=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}x+\frac{2}{2}=-\frac{1}{4}x+3$$

Exercice 4A.3 : Les fonctions avec racine carrée nécessitent la forme conjuguée

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\sqrt{2x+3}$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction *f* au point d'abscisse $x=3$.



1) Calculer $f(3)=\sqrt{2\times 3+3}=\sqrt{9}=3$

2) Détermination du coefficient directeur de la tangente par passage à la limite : DEUX METHODES

a) $$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{\sqrt{2\times(3+h)+3}-3}{h}=\frac{\sqrt{6+2h+3}-3}{h}=\frac{\sqrt{2h+9}-3}{h}\times\frac{\sqrt{2h+9}+3}{\sqrt{2h+9}+3}$$

$$=\frac{\sqrt{2h+9}-3}{h}\times\frac{\sqrt{2h+9}+3}{\sqrt{2h+9}+3}=\frac{\left(\sqrt{2h+9}\right)^2-3^2}{h\left(\sqrt{2h+9}+3\right)}=\frac{2h+9-9}{h\left(\sqrt{2h+9}+3\right)}=\frac{2h}{h\left(\sqrt{2h+9}+3\right)}=\frac{2}{\sqrt{2h+9}+3}$$

$$\rightarrow f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2h+9}+3}=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

b) $$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}\times\frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3}=\frac{\left(\sqrt{2x+3}\right)^2-3^2}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}$$

$$=\frac{2x+3-9}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\frac{2x-6}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}$$

$$\rightarrow f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3) Formule de la tangente en $x=3$: $T: y=f'(3)(x-3)+f(3)=\frac{1}{3}(x-3)+3=\frac{1}{3}x-1+3=\frac{1}{3}x+2$

Exercice 4A.4 :

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=x^2+x-3$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction *f* au point d'abscisse $x=2$.

1) Calculer $f(2)=2^2+2-3=4+2-3=3$ d'où le point $A(2;3)$

2) Calculer $f'(2)$ de deux façons différentes :

Première méthode :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\left[(2+h)^2+(2+h)-3\right]-3}{h}=\frac{4+4h+h^2+2+h-3-3}{h}$$

$$=\frac{5h+h^2}{h}=\frac{h\times5+h\times h}{h}=\frac{\boxed{h}(5+h)}{\boxed{h}}=5+h$$

$$\rightarrow f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}5+h=5$$

Deuxième méthode :

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\left(x^2+x-3\right)-3}{x-2}=\frac{x^2+x-3-3}{x-2}=\frac{x^2+x-6}{x-2}$$

Discriminant : $\Delta=1^2-4\times1\times(-6)=1+24=25=5^2$

$\rightarrow \Delta>0$: deux racines : $x_1=\frac{-1-5}{2\times1}=\frac{-6}{2}=-3$ et $x_2=\frac{-1+5}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$

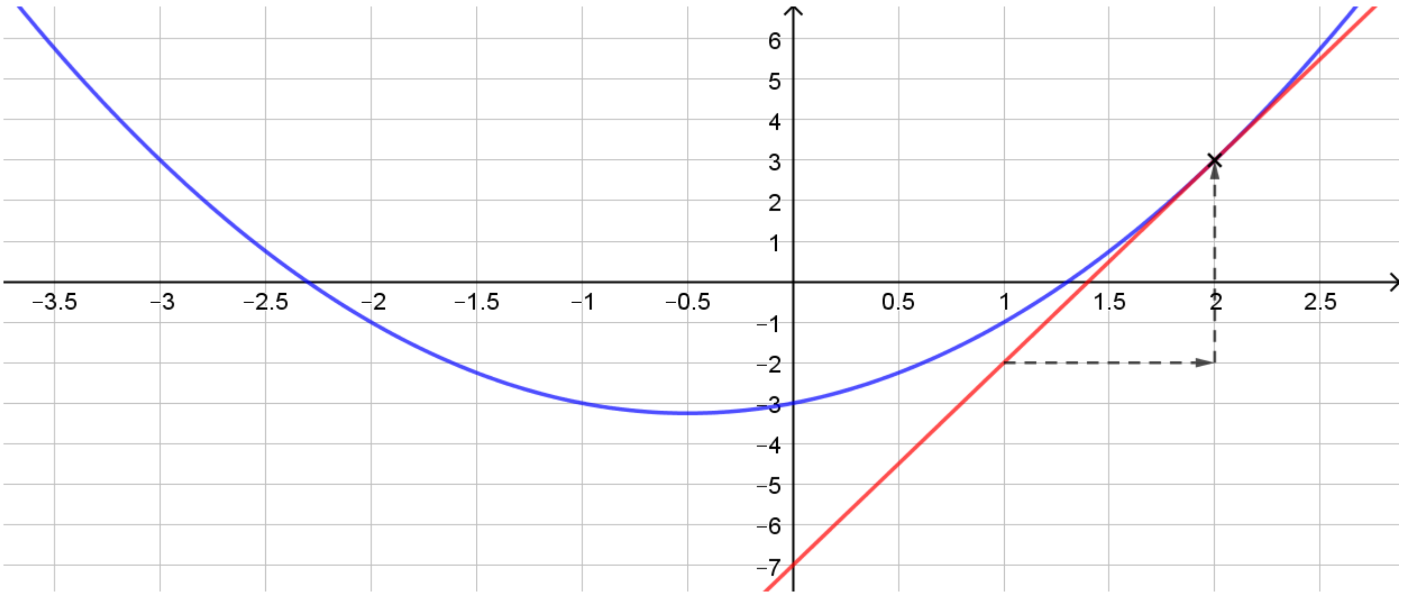
Ainsi $x^2+x-6=1\times(x+3)(x-2)$

Donc : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}=x+3$

$$\rightarrow f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x+3=2+3=5$$

3) Formule de la tangente en $x=2$:

$$T: y=f'(2)(x-2)+f(2)=5(x-2)+3=5x-10+3=5x-7$$



Exercice 4A.5 :

Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{1}{x}+x$.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant la fonction *f* au point d'abscisse $x=2$.

1) Calculer $f(2)=\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$ d'où le point $A\left(2;\frac{5}{2}\right)$

2) Soit un point $M(x;y)$ appartenant à C_f.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est :

Première méthode (lente) :

$$a=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}+(2+h)-\frac{5}{2}}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}+\frac{4}{2}+h-\frac{5}{2}}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}+h-\frac{1}{2}}{h}$$

$$=\frac{\frac{1}{2+h}\times\frac{2}{2}+h\times\frac{2(2+h)}{2(2+h)}-\frac{1}{2}\times\frac{2+h}{2+h}}{h}=\frac{\frac{2}{2(2+h)}+\frac{2h(2+h)}{2(2+h)}-\frac{2+h}{2(2+h)}}{h}$$

$$=\frac{\frac{2}{2(2+h)}+\frac{4h+2h^2}{2(2+h)}-\frac{2+h}{2(2+h)}}{h}=\frac{\frac{2+\left(4h+2h^2\right)-(2+h)}{2(2+h)}}{h}=\frac{\frac{2+4h+2h^2-2-h}{2(2+h)}}{h}$$

$$=\frac{\frac{2h^2+3h}{2(2+h)}}{\frac{h}{1}}=\frac{h\times 2h+h\times 3}{2(2+h)}\times\frac{1}{h}=\frac{\boxed{h}\times(2h+3)}{\boxed{h}\times 2(2+h)}=\frac{2h+3}{4+2h}$$

$$\rightarrow f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+3}{4+2h}=\frac{2\times 0+3}{4+2\times 0}=\frac{3}{4}$$

Deuxième méthode (plus rapide) :

$$a=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\frac{1}{x}+x-\frac{5}{2}}{x-2}=\frac{\frac{1\times 2}{x\times 2}+\frac{x\times 2x}{1\times 2x}-\frac{5\times x}{2\times x}}{x-2}=\frac{\frac{2}{2x}+\frac{2x^2}{2x}-\frac{5x}{2x}}{x-2}=\frac{\frac{2x^2-5x+2}{2x}}{x-2}$$

$$a=\frac{\frac{2x^2-5x+2}{2x}}{\frac{x-2}{1}}=\frac{2x^2-5x+2}{2x}\times\frac{1}{x-2}=\frac{2x^2-5x+2}{2x(x-2)}$$

Discriminant : $\Delta=(-5)^2-4\times 2\times 2=25-16=9=3^2$

Racines : $x_1=\frac{5-3}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{5+3}{2\times 2}=\frac{8}{4}=2$

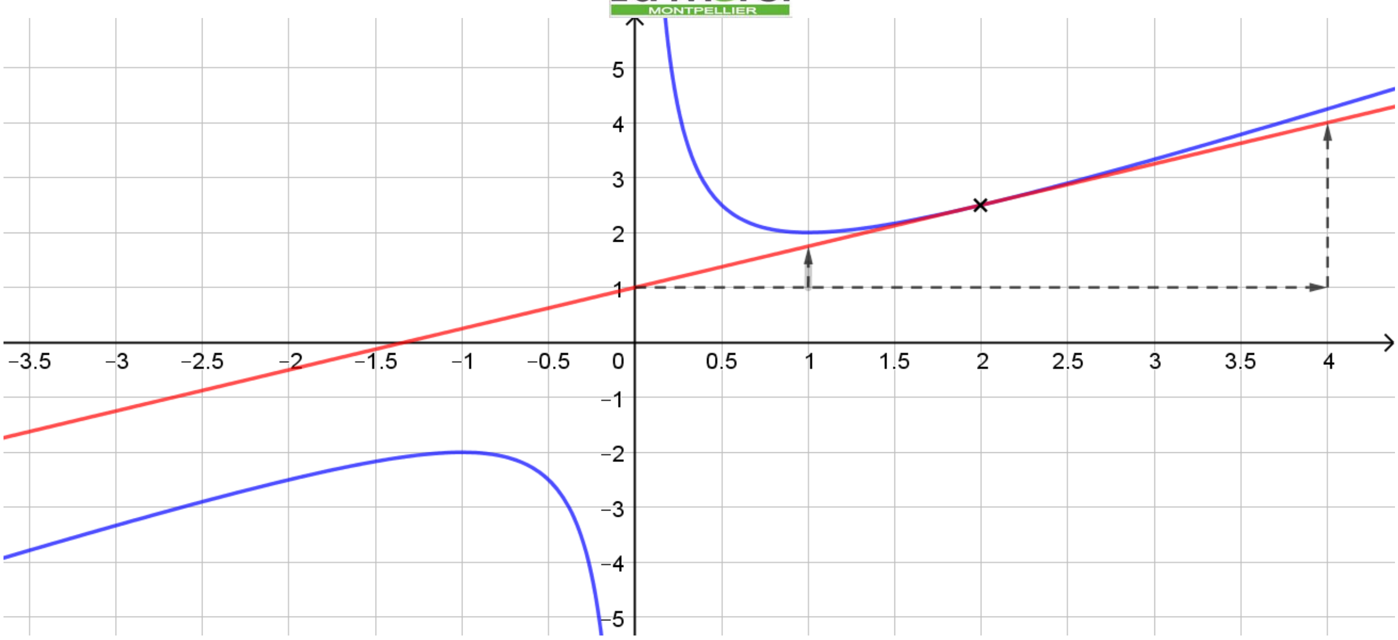
Donc $a=\frac{2x^2-5x+2}{2x(x-2)}=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}{2x(x-2)}=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2x}=\frac{x-\frac{1}{2}}{x}$

Par passage à la limite, on obtient le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse : $x = 2$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-\frac{1}{2}}{x}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

3) Formule de la tangente en $x=2$:

$$T: y=f'(2)(x-2)+f(2)=\frac{3}{4}(x-2)+\frac{5}{2}=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{3}{4}x+\frac{2}{2}=\frac{3}{4}x+1$$



5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4