Exercices corrigés sur les dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

Dérivée d'une fonction de référence dérivable multipliée par un réel k :

$$(k\times u(x))' = k\times u'(x)$$

Exemples :

$f(x)=5x^2$: f est le produit d'une constante 5 par la fonction dérivable $u(x)=x^2$

ainsi : $f(x)=5\times u(x)$

donc : $f'(x)=5\times u'(x)$ soit : $f'(x)=5\times 2x=10x$

$f(x)=\dfrac{-3}{x}$: f est le produit d'une constante -3 par la fonction dérivable $u(x)=\dfrac{1}{x}$

ainsi : $f(x)=-3\times u(x)$

donc : $f'(x)=-3\times u'(x)$ soit : $f'(x)=-3\times\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)=\dfrac{3}{x^2}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{25x}{9}}$: f est le produit d'une constante $\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\dfrac{5}{3}$ par la fonction dérivable $u(x)=\sqrt{x}$

ainsi : $f(x)=\dfrac{5}{3}\times u(x)$

donc : $f'(x)=\dfrac{5}{3}\times u'(x)$ soit : $f'(x)=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5}{6\sqrt{x}}$

Dérivée de la somme de deux fonctions de référence dérivables :

$$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$$

Exemples :

$f(x)=x^2+9$: f est la somme de deux fonctions dérivables $u(x)=x^2$ et $v(x)=9$

ainsi : $f(x)=u(x)+v(x)$

donc : $f'(x)=u'(x)+v'(x)$ soit : $f'(x)=2x+0=2x$

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$: f est la somme de deux fonctions dérivables $u(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\sqrt{x}$

ainsi : $f(x)=u(x)+v(x)$

donc : $f'(x)=u'(x)+v'(x)$ soit : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

on ramène $f'(x)$ sur le même dénominateur : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\dfrac{x^2}{x^2}=\dfrac{x^2-2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}$

$f(x)=2x^3-6x^2+8x-5$: f est la somme de quatre fonctions dérivables :

$u(x)=2x^3$, $v(x)=-6x^2$, $w(x)=+8x$ et $t(x)=-5$

$u'(x)=6x^2$, $v'(x)=-12x$, $w'(x)=8$ et $t'(x)=0$

ainsi : $f(x)=u(x)+v(x)+w(x)+t(x)$

et : $f'(x)=u'(x)+v'(x)+w'(x)+t'(x)$

soit $f'(x)=2\times 3x^2-6\times 2x+8\times 1=6x^2-12x+8$

Dérivées du produit de deux fonctions de référence dérivables :

$$\left(u(x)\times v(x)\right)'=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$$

Exemples :

$f(x)=\left(1-x^2\right)\times\left(2x^3+5x\right)$

f est le produit de deux fonctions dérivables $u(x)=1-x^2$ et $v(x)=2x^3+5x$

on calcule les dérivées des fonctions u et v : $u'(x)=-2x$ et $v'(x)=2\times 3x^2+5=6x^2+5$

ainsi : $f(x)=u(x)\times v(x)$

donc : $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

soit : $f'(x)=-2x\times\left(2x^3+5x\right)+\left(1-x^2\right)\times\left(6x^2+5\right)$

et : $f'(x)=-4x^4-10x^2+6x^2+5-6x^4+5x^2$

ainsi : $f'(x)=-10x^4+x^2+5$

$f(x)=\left(2\sqrt{x}-5\right)\times\left(\dfrac{5}{2x}\right)$

f est le produit de deux fonctions dérivables $u(x)=2\times\sqrt{x}-5$ et $v(x)=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{x}$

on calcule les dérivées des fonctions u et v : $u'(x)=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $v'(x)=\dfrac{5}{2}\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{5}{2x^2}$

ainsi : $f(x)=u(x)\times v(x)$

donc : $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

soit : $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\times\left(\dfrac{5}{2x}\right)+\left(2\sqrt{x}-5\right)\times\left(-\dfrac{5}{2x^2}\right)$

soit : $f'(x)=\dfrac{5}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{5\times 2\sqrt{x}}{2x^2}+\dfrac{25}{2x^2}$

soit : $f'(x)=\dfrac{5}{2x\sqrt{x}}\times\dfrac{x}{x}-\dfrac{5\times 2\sqrt{x}}{2x^2}\times\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{25}{2x^2}\times\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

soit : $f'(x)=\dfrac{5x-10x+25\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}=\dfrac{-5x+25\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}\times\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{-5x\sqrt{x}+25x}{2x^2}=\dfrac{-5\sqrt{x}+25}{2x}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{-\sqrt{x}+5}{x}$