Exercice 4A.1 :

Etudier l'ensemble de définition, la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$
2) $f(x)=\cos 2x$
3) $f(x)=\cos^2 x=(\cos x)^2$

Exercice 4A.2 :

Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{2}{2+\cos x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
2) $f(x)=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1$ définie sur $\mathbb{R}$.
3) $f(x)=\left(1+\cos\dfrac{x}{2}\right)\sin\dfrac{x}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
4) $f(x)=\sin^2(x)\times\cos(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4A.1 :

1) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$

Ensemble de définition de f : la fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

Etude de la parité de la fonction f :

$$f(-x) = \sin\frac{-x}{2} = -\sin\frac{x}{2} = -f(x)$$ donc f est impaire : on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

Etude de la périodicité de la fonction f : soit p la période cherchée :

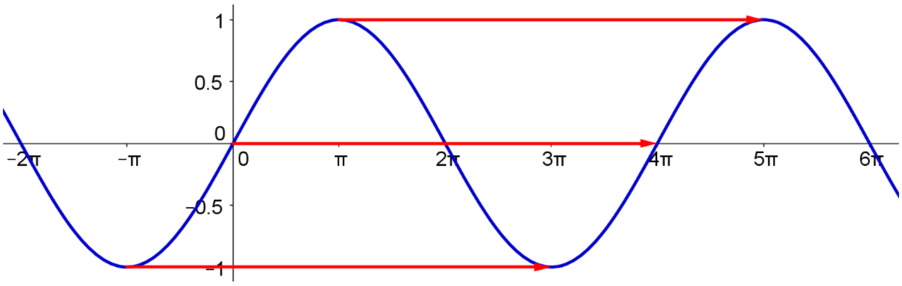
$$f(x+p) = f(x) \Leftrightarrow \sin\frac{x+p}{2} = \sin\frac{x}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{p}{2}\right) = \sin\frac{x}{2}$$

On pose $\mathrm{X} = \dfrac{x}{2}$, ainsi : $\sin\left(\mathrm{X}+\dfrac{p}{2}\right) = \sin \mathrm{X}$

La fonction $\sin \mathrm{X}$ est 2π périodique donc : $\dfrac{p}{2} = 2\pi \Leftrightarrow p = 4\pi$

→la fonction f est 4π-périodique.

→ on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude 4π , par exemple : $[-2\pi\,;2\pi]$



2) $f(x) = \cos 2x$

Ensemble de définition de f : la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

Etude de la parité de la fonction f :

$$f(-x) = \cos(-2x) = \cos 2x = f(x)$$ donc f est paire : on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

Etude de la périodicité de la fonction f : soit p la période cherchée :

$$f(x+p) = f(x) \Leftrightarrow \cos\big(2(x+p)\big) = \cos 2x \Leftrightarrow \cos(2x+2p) = \cos 2x$$

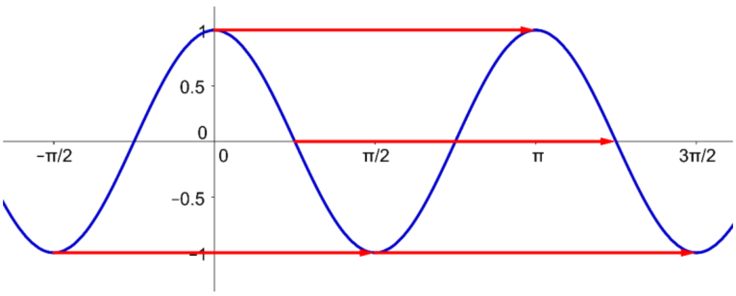
On pose $\mathrm{X} = 2x$, ainsi : $\cos(\mathrm{X}+2p) = \cos \mathrm{X}$

La fonction $\cos \mathrm{X}$ est 2π périodique donc : $2p = 2\pi \Leftrightarrow p = \pi$

→la fonction f est π-périodique.

→ on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude π , par exemple : $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

Grâce à la parité et à la périodicité de f, on en déduit l'intervalle d'étude à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.



3) $f(x)=\cos^2 x$

Ensemble de définition de *f* : la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

Etude de la parité de la fonction *f*, en sachant que : $\cos(-x)=\cos(x)$

$f(-x)=\cos^2(-x)=\cos^2(x)=f(x)$ donc *f* est paire : on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

Etude de la périodicité de la fonction *f* : soit *p* la période cherchée :

$f(x+p)=f(x) \Leftrightarrow \cos^2(x+p)=\cos^2 x$

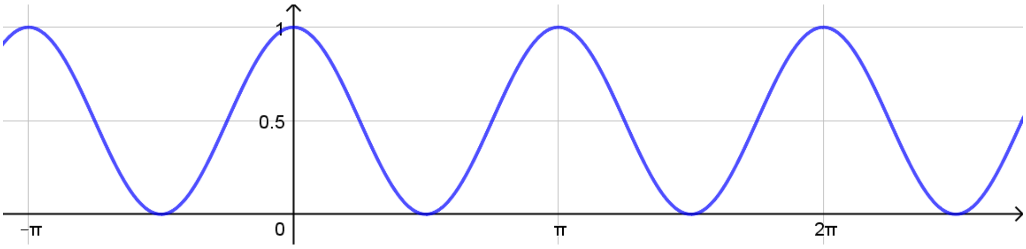
Or : $\cos(x+\pi)=-\cos(x) \Leftrightarrow [\cos(x+\pi)]^2=[-\cos(x)]^2 \Leftrightarrow \cos^2(x+\pi)=\cos^2(x)$

Ainsi : $\cos^2(x)=\cos^2(x+p)=\cos^2(x+\pi)$

Ainsi $p=\pi$: la fonction *f* est π-périodique

→ on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude π, par exemple : $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

→ la fonction *f* est également paire, on peut l'étudier sur l'intervalle: $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.



Exercice 4A.2 :

1) $f(x)=\dfrac{2}{2+\cos x}$

Ensemble de définition de *f* :

f est définie si $2+\cos x\neq 0$ soit $\cos x\neq -2$. Or pour tout réel *x*, $\cos x\geq -1$, donc $D_f=\mathbb{R}$.

Etude de la parité de la fonction *f* :

$f(-x)=\dfrac{2}{2+\cos(-x)}=\dfrac{2}{2+\cos x}=f(x)$ donc *f* est paire.

Etude de la périodicité de la fonction *f* : soit *p* la période cherchée :

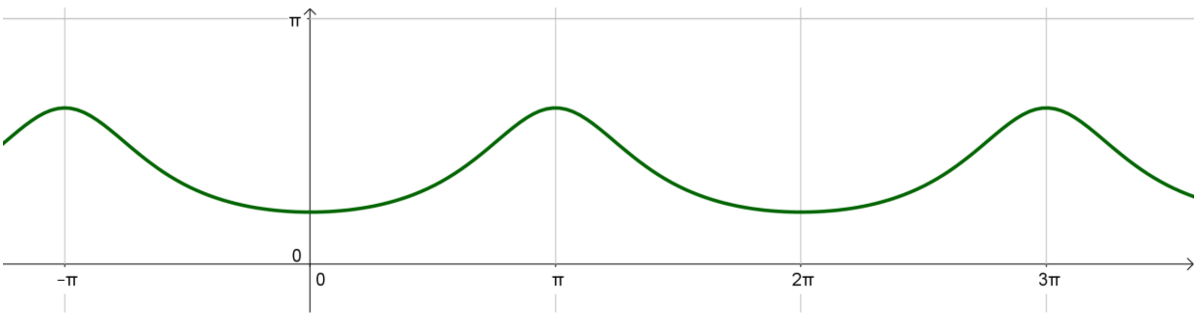
$f(x+p)=f(x) \Leftrightarrow \dfrac{2}{2+\cos(x+p)}=\dfrac{2}{2+\cos x} \Leftrightarrow \cos(x+p)=\cos x$

La fonction $\cos x$ est 2π périodique donc : $p=2\pi$

→la fonction *f* est 2π-périodique.

→ on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude π, par exemple : $[-\pi;\pi]$

Grâce à la parité et à la périodicité de *f*, on en déduit l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$.



2) $f(x)=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1$

Ensemble de définition de f : la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

Etude de la parité de la fonction f :

$$f(-x)=\cos^2(-2x)+\cos(-2x)-1=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1=f(x)$$ donc f est paire.

Etude de la périodicité de la fonction f : soit p la période cherchée :

$$f(x+p)=f(x) \Leftrightarrow \cos^2(2(x+p))+\cos(2(x+p))-1=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(2x+2p)+\cos(2x+2p)-1=\cos^2(2x)+\cos(2x)-1$$

On pose $X=2x$, ainsi : $\cos^2(X+2p)+\cos(X+2p)-1=\cos^2(X)+\cos(X)-1$

La fonction $\cos(X)$ est 2π périodique donc : $2p=2\pi \Leftrightarrow p=\pi$

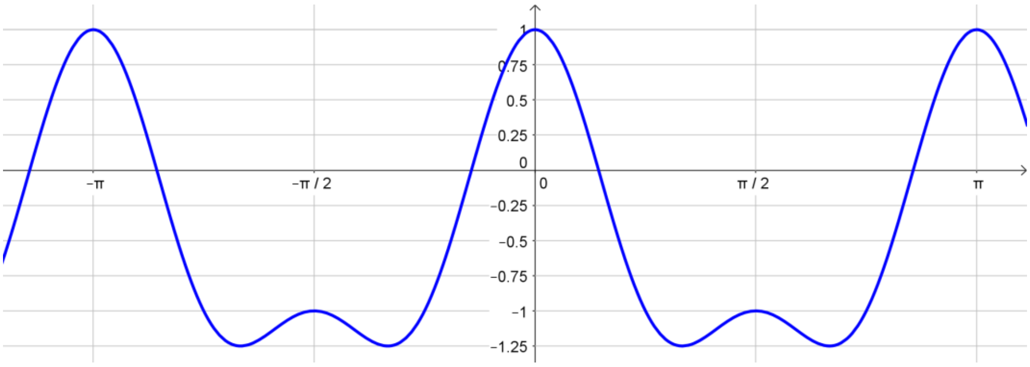
La fonction $\cos^2(X)$ admet une période égale à π (voir exercice 1)

$$\cos^2(2x+2p)=\cos^2(2x) \Leftrightarrow 2p=\pi \Leftrightarrow p=\frac{\pi}{2}$$

→On sélectionne la plus petite valeur qui soit multiple des deux périodes trouvées : la fonction f est π-périodique.

→ on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude π, par exemple : $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Grâce à la parité et à la périodicité de f, on en déduit l'intervalle d'étude à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.



3) $f(x)=\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}$

Ensemble de définition de f : les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

Etude de la parité de la fonction f :

$$f(-x)=\left(1+\cos\frac{-x}{2}\right)\sin\frac{-x}{2}=\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\left(-\sin\frac{x}{2}\right)=-f(x)$$ donc f est impaire.

Etude de la périodicité de la fonction f : soit p la période cherchée :

$$f(x+p)=f(x) \Leftrightarrow \left(1+\cos\frac{x+p}{2}\right)\sin\frac{x+p}{2}-1=\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{p}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{p}{2}\right)-1=\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}$$

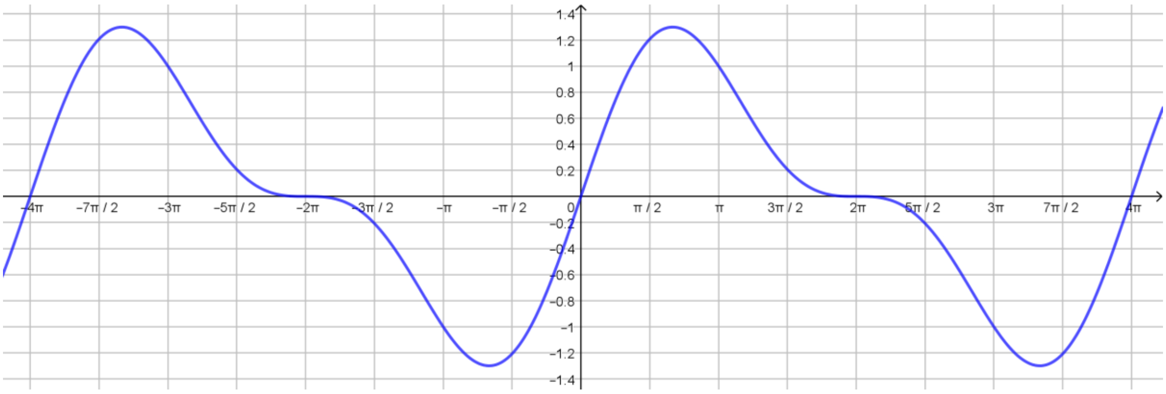
On pose $X=\frac{x}{2}$, ainsi : $\left(1+\cos\left(X+\frac{p}{2}\right)\right)\sin\left(X+\frac{p}{2}\right)-1=(1+\cos X)\sin X$

Les fonctions $\cos X$ et $\sin X$ sont 2π périodiques donc : $\frac{p}{2}=2\pi \Leftrightarrow p=4\pi$

→la fonction f est 4π-périodique.

→ on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude π , par exemple : $[-2\pi;2\pi]$

Grâce à la parité et à la périodicité de f , on en déduit l'intervalle d'étude à $[0;2\pi]$.



4) $f(x)=\sin^2(x)\times\cos(2x)$

Ensemble de définition de f : les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

Etude de la parité de la fonction f :

$$f(-x)=\sin^2(-x)\times\cos(-2x)=\sin^2(x)\times\cos(2x)=f(x)\quad \text{donc } f \text{ est paire.}$$

Etude de la périodicité de la fonction f : soit p la période cherchée :

$$f(x+p)=f(x)\iff \sin^2(x+p)\times\cos(2(x+p))=\sin^2(x)\times\cos(2x)$$

$$\iff \sin^2(x+p)\times\cos(2x+2p)=\sin^2(x)\times\cos(2x)$$

La fonction cosinus est 2π périodique donc : $2p=2\pi \iff p=\pi$

La fonction sinus au carré admet une période égale à 2π , cependant on remarque que :

$$\sin^2(x+\pi)=(\sin(x+\pi))^2=(-\sin x)^2=\sin^2 x$$

La fonction sinus au carré est donc elle aussi π périodique.

→la fonction f est donc π périodique.

→ on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude π , par exemple : $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Grâce à la parité et à la périodicité de f , on en déduit l'intervalle d'étude à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.