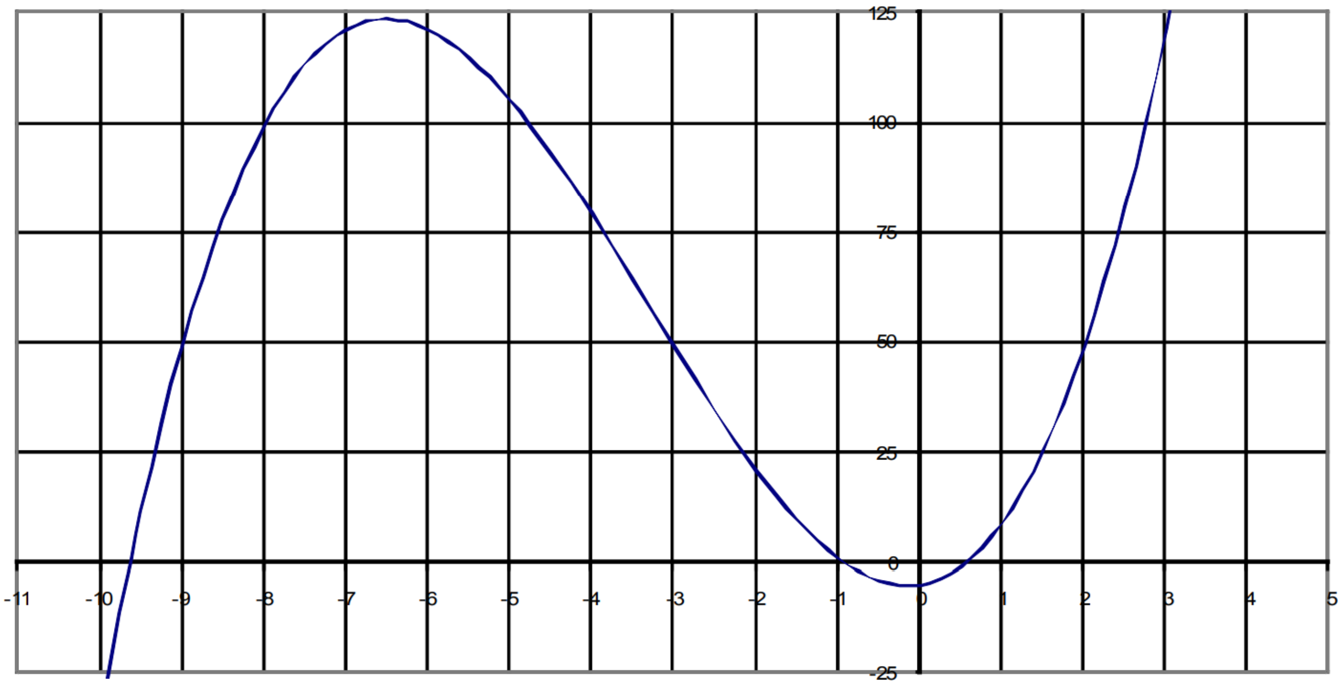
Exercice 8A.1

La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction *f*.



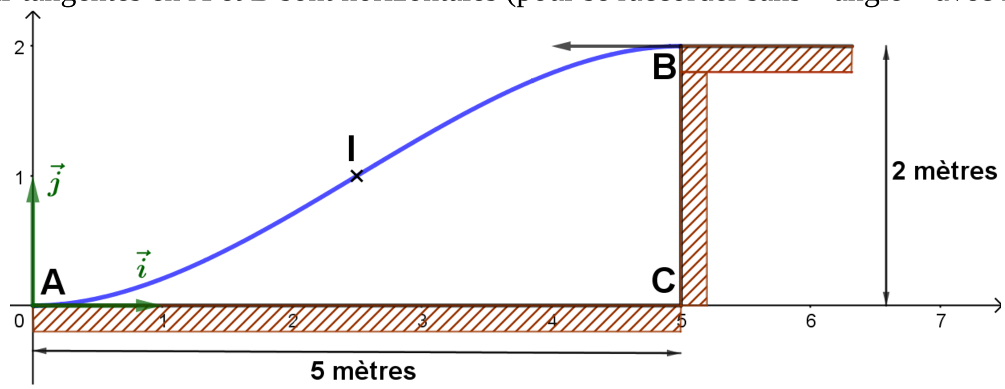
1. Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative de la fonction *f* au point d'abscisse -1 ?
2. Quelles sont les variations de la fonction *f* sur $[-10;3]$?

Problème 8A.2

Pour faire franchir à des chariots une marche de deux mètres de haut, sur une distance horizontale de cinq mètres, on cherche à construire un toboggan.

La courbe C, qui est une vue en coupe du toboggan, doit obéir aux contraintes suivantes :

- la courbe contient les points A, B et le milieu I de [AB] ;
- la fonction définissant la courbe dans le repère $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$ est dérivable ;
- les demi-tangentes en A et B sont horizontales (pour se raccorder sans « angle » avec le plan du sol).



I. Recherche de fonctions polynômes du second degré

On cherche deux arcs AI et IB de deux paraboles se raccordant en I.

1. Démontrer qu'il existe une unique fonction polynôme du second degré : $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, répondant aux conditions précédentes, telle que l'arc AI soit un arc de la parabole représentant *f*.
2. De même, démontrer qu'il existe une unique fonction polynôme du second degré g, répondant aux conditions précédentes, telle que l'arc IB soit un arc de la parabole représentant g.

On considère la courbe C qui est la réunion des deux arcs de paraboles AI et IB.

3. Démontrer que la demi-tangente à gauche et la demi-tangente à droite en I sont contenues dans la même droite. La courbe C convient-elle ?

II. Recherche d'une fonction polynôme du troisième degré

Démontrer qu'il existe une unique fonction polynôme du troisième degré :

$$h : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \;,$$

dont la courbe passe par les points A et B avec des tangentes horizontales

III. Recherche de la pente maximale

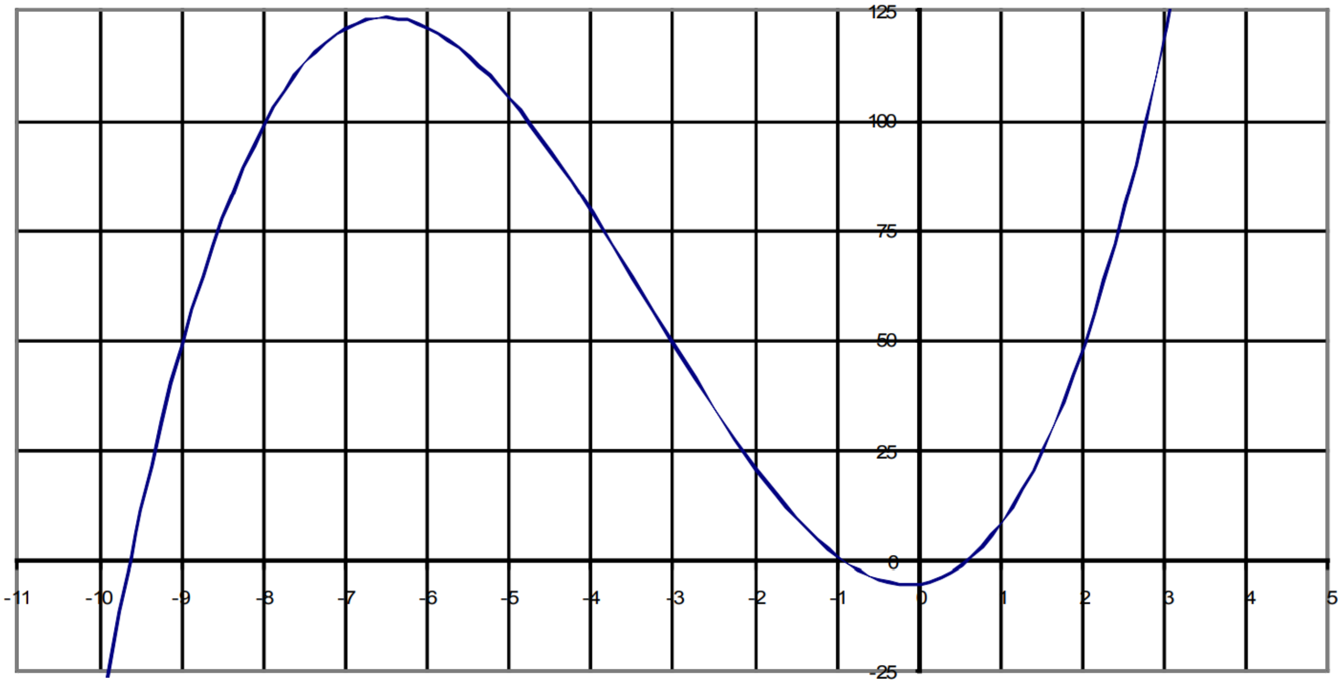
On rappelle que la pente en un point de la courbe est le coefficient directeur de la tangente à C en ce point.

1. Dans le cas I. de la réunion de deux arcs de paraboles, déterminer la pente maximale.
2. Dans le cas II. de la courbe du troisième degré, déterminer la pente maximale.
3. On veut, de plus, que l'angle aigu de la tangente avec la droite horizontale (AC) n'excède pas 35°. Les deux courbes précédentes conviennent-elles ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 8A.1

La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction *f*.



1. *Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse* -1 *?*
   D'après le graphique : $f'(-1)=0$ donc la courbe représentative de la fonction *f* au point d'abscisse -1 admet une tangente horizontale.
2. *Quelles sont les variations de la fonction f sur* $[-10;3]$ *?*

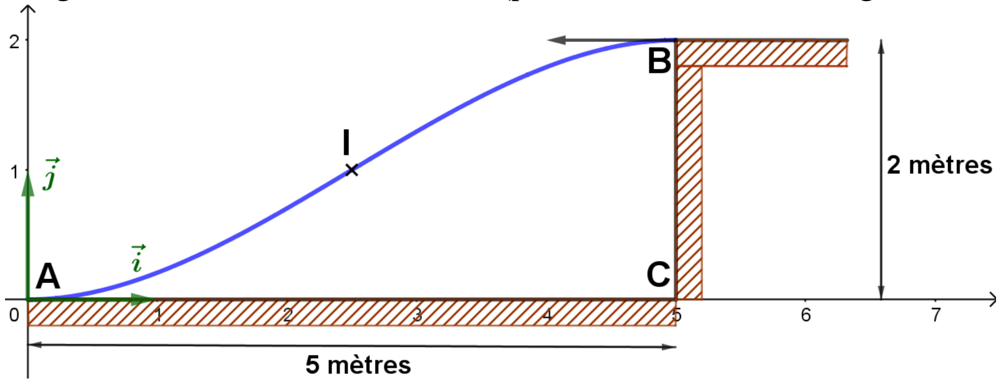
x	-10		$-9,6$		-1		$0,5$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

Problème 8A.2

Pour faire franchir à des chariots une marche de deux mètres de haut, sur une distance horizontale de cinq mètres, on cherche à construire un toboggan.

La courbe C, qui est une vue en coupe du toboggan, doit obéir aux contraintes suivantes :

- la courbe contient les points A, B et le milieu I de [AB] ;
- la fonction définissant la courbe dans le repère $(A,\vec{i},\vec{j})$ est dérivable ;
- les demi-tangentes en A et B sont horizontales (pour se raccorder sans « angle » avec le plan du sol).



I. *Recherche de fonctions polynômes du second degré*

On cherche deux arcs AI et IB de deux paraboles se raccordant en I.

1. *Démontrer qu'il existe une unique fonction polynôme du second degré :* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, *répondant aux conditions précédentes, telle que l'arc AI soit un arc de la parabole représentant f.*

Les coordonnées du point I sont $(2,5;1)$.

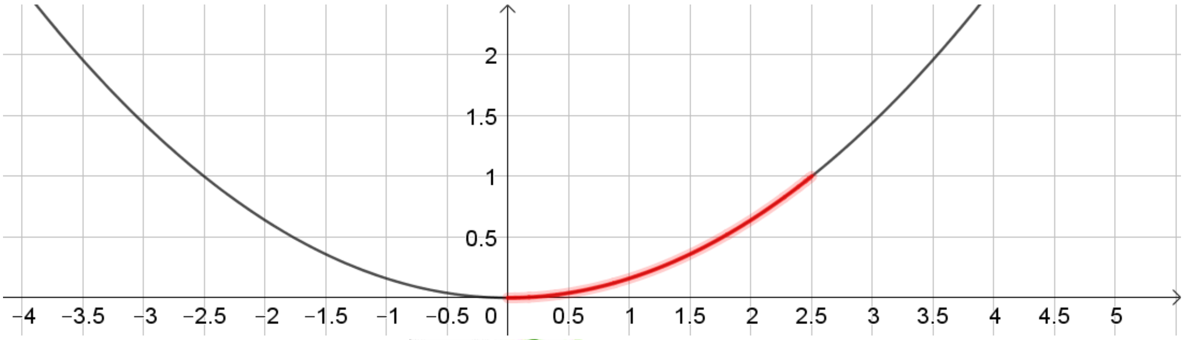
La dérivée de la fonction *f* définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$$f'(x) = a \times 2x + b = 2ax + b$$

La fonction cherchée *f* vérifie :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f(2,5) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \\ 2a \times 0 + b = 0 \\ a \times 2,5^2 + b \times 2,5 + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ 6,25a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = \dfrac{1}{6,25} = \dfrac{4}{25} \end{cases}$$

Ainsi $$f(x) = \frac{4}{25}x^2$$



2. *De même, démontrer qu'il existe une unique fonction polynôme du second degré g, répondant aux conditions précédentes, telle que l'arc IB soit un arc de la parabole représentant g.*

La dérivée de la fonction *g* définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$$g'(x) = a \times 2x + b = 2ax + b$$

La fonction cherchée *g* vérifie :

$$\begin{cases} g(2,5) = 1 \\ g(5) = 2 \\ g'(5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 2,5^2 + b \times 2,5 + c = 1 \\ a \times 5^2 + b \times 5 + c = 2 \\ 2a \times 5 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6,25a + 2,5b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = 2 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{vmatrix}$$

En soustrayant la première ligne à la seconde, on peut faire disparaitre la variable *c* :

$$25a - 6,25a + 5b - 2,5b + c - c = 2 - 1$$

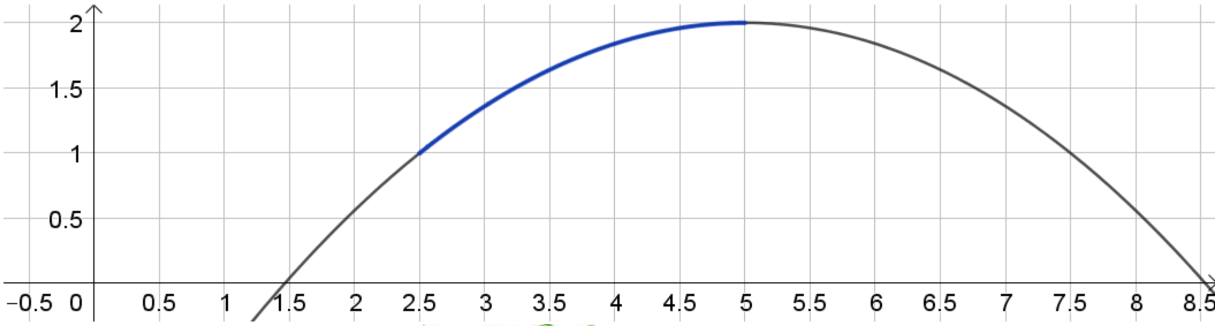
$$\Leftrightarrow \; 18,75a + 2,5b = 1$$

Le système devient :

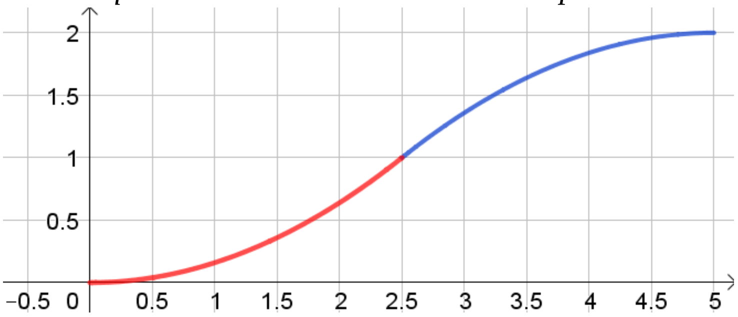
$$\begin{cases} 25a + 5b + c = 2 \\ 18,75a + 2,5b = 1 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25a + 5b + c = 2 \\ 18,75a + 2,5 \times (-10a) = 1 \\ b = -10a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25a + 5b + c = 2 \\ 18,75a - 25a = 1 \\ b = -10a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25a+5b+c=2 \\ -6,25a=1 \\ b=-10a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25a+5b+c=2 \\ a=\dfrac{1}{-6,25}=-\dfrac{4}{25} \\ b=-10\times\left(-\dfrac{4}{25}\right)=\dfrac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2-25\times\left(-\dfrac{4}{25}\right)+5\times\dfrac{8}{5}=-2 \\ a=-\dfrac{4}{25} \\ b=\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Ainsi $\quad g(x)=-\dfrac{4}{25}x^2+\dfrac{8}{5}x-2$



On considère la courbe C qui est la réunion des deux arcs de paraboles AI et IB.



3. *Démontrer que la demi-tangente à gauche et la demi-tangente à droite en I sont contenues dans la même droite. La courbe C convient-elle ?*

Nous devons comparer $f'(2,5)$ et $g'(2,5)$:

$$f'(x)=\frac{4}{25}\times 2x=\frac{8}{25}x \text{ donc } f'(2,5)=\frac{8}{25}\times 2,5=0,8$$

$$g'(x)=-\frac{4}{25}\times 2x+\frac{8}{5}=-\frac{8}{25}x+\frac{8}{5}$$

$$\text{donc } g'(2,5)=\frac{8}{25}\times 2,5+\frac{8}{5}=-0,8+1,6=0,8=f'(2,5)$$

La demi-tangente à gauche et la demi-tangente à droite en I sont contenues dans la même droite.

II. Recherche d'une fonction polynôme du troisième degré

Démontrer qu'il existe une unique fonction polynôme du troisième degré :

$$h: x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d\ ,$$

dont la courbe passe par les points A et B avec des tangentes horizontales

En intégrant tous les résultats, on obtient, avec $h'(x)=3ax^2+2bx+c$

$$\begin{cases} h(0)=0 \\ h(5)=2 \\ h'(0)=0 \\ h'(5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times 0^3+b\times 0^2+c\times 0+d=0 \\ a\times 5^3+b\times 5^2+c\times 5+d=2 \\ 3a\times 0^2+2b\times 0+c=0 \\ 3a\times 5^2+2b\times 5+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ 125a+25b=2 \\ c=0 \\ 75a+10b=0 \end{cases} \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{vmatrix}$$

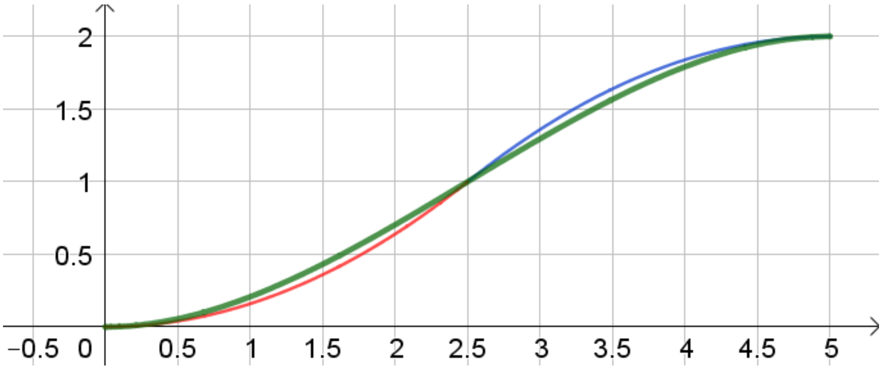
On réalise $2\times l_2-5\times l_4$ pour retirer la variable b :

$$250a-375a=4 \Leftrightarrow -125a=4 \Leftrightarrow a=-\frac{4}{125}$$

Avec la ligne l_4, on obtient :

$$10b=-75a \Leftrightarrow b=-\frac{75}{10}a=-\frac{75}{10}\times\left(-\frac{4}{125}\right)=\frac{150}{625}=\frac{6}{25}$$

Ainsi : $h(x)=-\frac{4}{125}x^3+\frac{6}{25}x^2$



Courbe en vert en comparaison des résultats précédents obtenus.

III. Recherche de la pente maximale

On rappelle que la pente en un point de la courbe est le coefficient directeur de la tangente à C en ce point.

1. *Dans le cas I. de la réunion de deux arcs de paraboles, déterminer la pente maximale.*

Sur l'intervalle $[0;2,5]$, la fonction $f(x)=\frac{4}{25}x^2$ admet pour dérivée $f'(x)=\frac{8}{25}x$

→la dérivée est une fonction affine croissante donc son maximum est :

$$f'(2,5)=\frac{8}{25}\times 2,5=0,8$$

Sur l'intervalle $[2,5;5]$, la fonction $g(x)=-\frac{4}{25}x^2+\frac{8}{5}x-2$ admet pour dérivée :

$$g'(x)=-\frac{8}{25}x+\frac{8}{5}$$

→la dérivée est une fonction affine décroissante donc son maximum est :

$$g'(2,5)=-\frac{8}{25}\times 2,5+\frac{8}{5}=0,8$$

(on le savait déjà)

2. *Dans le cas II. de la courbe du troisième degré, déterminer la pente maximale.*

Sur l'intervalle $[0;5]$, la fonction $h(x)=-\frac{4}{125}x^3+\frac{6}{25}x^2$ admet pour dérivée

$$h'(x)=-\frac{4}{125}\times 3x^2+\frac{6}{25}\times 2x=-\frac{12}{125}x^2+\frac{12}{25}x$$

La dérivée est une fonction polynômiale du second degré orientée « vers le bas » car $a=-\dfrac{12}{125}$, son maximum est :

$$-\frac{b}{2a}=\frac{-\dfrac{12}{25}}{2\times-\dfrac{12}{125}}=\frac{-\dfrac{12}{25}}{-\dfrac{24}{125}}=-\frac{12}{25}\times\left(-\frac{125}{24}\right)=-\frac{12}{25}\times\left(-\frac{125}{24}\right)=\frac{5}{2}$$

La dérivée est maximale en $\dfrac{5}{2}$ et vaut :

$$h'\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{12}{125}\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{12}{25}\times\frac{5}{2}=-\frac{12}{125}\times\frac{25}{4}+\frac{6}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3}{5}=0,6$$

3. *On veut, de plus, que l'angle aigu de la tangente avec la droite horizontale (AC) n'excède pas 35°. Les deux courbes précédentes conviennent-elles ?*

Le coefficient directeur d'une droite est égal à la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe des abscisses.

Dans le cas I., la pente maximale est égale à 0,8 soit :

$$\tan\alpha=0,8 \iff \alpha=\tan^{-1}0,8\simeq 38,66°$$

Dans le cas II., la pente maximale est égale à 0,6 soit :

$$\tan\alpha=0,6 \iff \alpha=\tan^{-1}0,6\simeq 30,96°\,.$$

La deuxième courbe vérifie la contrainte imposée.