1ère ES

Interrogation sur les équations de tangentes et les dérivées

Exercice 1 :

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-3\right)^2}$ définie sur $\mathbb{R}/\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$. Calculer la fonction dérivée de la fonction f.

Soit la fonction $g(x)=\dfrac{3-3x^2}{1-5x}$ définie sur $\mathbb{R}/\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.

Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x)=x^3+3x^2-9x+2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$
2) Etudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
3) Faire le tableau de variation complet de la fonction f.

BONUS : Calculez l'équation de la tangente au point d'abscisse x = 1

1ère ES

Interrogation sur les équations de tangentes et les dérivées - CORRIGE

Exercice 1 :

$f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-3\right)^2}$ définie sur $\mathbb{R}/\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$.

Si on pose : $u(x)=\left(x^2-3\right)^2$, alors la fonction f s'écrit : $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ (vous devez l'écrire)

La dérivée de $\dfrac{1}{u(x)}$ est $\dfrac{-u'(x)}{\left[u(x)\right]^2}$: il faut donc calculer $u'(x)$

La dérivée de $\left[v(x)\right]^2$ est $2\times v(x)\times v'(x)$, donc : $u'(x)=2\times\left(x^2-3\right)\times 2x=4x\times\left(x^2-3\right)$

Ainsi : $$f'(x)=\frac{-u'(x)}{\left[u(x)\right]^2}=\frac{-4x\times\left(x^2-3\right)}{\left[\left(x^2-3\right)^2\right]^2}=\frac{-4x\times\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-3\right)^4}=\frac{-4x}{\left(x^2-3\right)^3}$$

$g(x)=\dfrac{3-3x^2}{1-5x}$ définie sur $\mathbb{R}/\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$.

Si on pose : $u(x)=3-3x^2$ et $v(x)=1-5x$, alors la fonction g s'écrit : $g(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

La dérivée de $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ est $\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$ avec $u'(x)=-3\times 2x=-6x$ et $v'(x)=-5$

$$g'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}=\frac{-6x(1-5x)-\left(3-3x^2\right)\times(-5)}{(1-5x)^2}=\frac{-6x+30x^2+15-15x^2}{(1-5x)^2}=\frac{15x^2-6x+15}{(1-5x)^2}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x)=x^3+3x^2-9x+2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Dérivée de f sur $\mathbb{R}$: $f'(x)=3x^2+6x-9$
2) Signe de f' sur $\mathbb{R}$: il faut d'abord trouver les racines de ce trinôme.

   Discriminent : $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times 3\times(-9)=36+108=144=12^2$ → $\Delta>0$: il y a 2 racines

   Racines : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6-12}{2\times 3}=\dfrac{-18}{6}=-3$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-6+12}{2\times 3}=\dfrac{6}{6}=1$

   Le trinôme est du signe de a (a = 3) à l'extérieur de ses 2 racines, donc :

   $f'(x)>0$ si $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ et $f'(x)<0$ si $x\in\left]-3;1\right[$
3) Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f'		+		−		+	
f		↗		↘		↗	

$f(1)=1^3+3\times 1^2-9\times 1+2=1+3-9+2=-3$

$f(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2-9\times(-3)+2=-27+27+27+2=29$

BONUS : L'équation de la tangente à la courbe représentant f en un point d'abscisse 1 est :

$y = f'(1)\times(x-1)+f(1)$, avec $f(1)=-3$ et $f'(1)=3\times1^2+6\times1-9=3+6-9=0$

donc l'équation est : $y=0\times(x-1)+29$, soit $\underline{y=29}$ **:** c'est une droite horizontale