Notre Dame de La Merci - Montpellier

Exercice 4C.1 :

Eric a fait une randonnée de 3 jours. Chaque jour, le nombre de kilomètres à parcourir était égal aux $\frac{3}{4}$ du nombre de kilomètres parcourus la veille. Au total, en 3 jours il a fait 83,25 km.
Combien de kilomètres a-t-il fait le 1er jour ?

Exercice 4C.2 :

Ce nouveau magasin bio fait fureur. Depuis le jour de son ouverture, chaque jour le nombre de clients a augmenté de 5%. Au soir du 10ème jour, le directeur du magasin a annoncé fièrement à ses employés qu'en 10 jours le magasin avait reçu 1258 clients.
Combien de clients le magasin a-t-il reçus le premier jour ?

Exercice 4C.3 :

Pimpim et Orphée creusent un puits dans le désert.
Ils creusent 3 mètres le premier jour, puis 3,10 mètres le deuxième, 3,20 mètres le troisième, et toujours 10 centimètres de plus chaque jour. L'eau est à une profondeur de 300 mètres.
Combien de jours leur faudra-t-il pour atteindre l'eau?

Exercice 4C.4 :

Pimpim et Orphée veulent sortir du désert.
Ils parcourent 10 kilomètres le premier jour.
En raison de la fatigue, ils parcourent 5% de moins à chaque jour qui passe.
Combien de jours seront nécessaires pour atteindre le bout du désert situé à 150 kilomètres?

Exercice 4C.5 :

On place 300 euros sur un livret d'épargne rémunéré à 4% par an.
Chaque année les intérêts s'accumulent et on n'effectue ni dépôt ni retrait.
Quel sera le montant sur le livret au bout de 15 ans?

Exercice 4C.6 :

Une usine assure, en 2000, une production de 100 000 articles. Elle s'engage à augmenter sa production de 3% pendant 5 ans.

1) Quelle sera sa production en 2005 ?
2) Combien d'articles auront été fabriqués de 2000 à 2005?

Exercice 4C.7 : Abonnements

Le 01/01/2015, un journal comptait 15 000 abonnés.
Une étude a montré que, chaque mois, 850 abonnements arrivent à échéance. Sur ces 850 abonnements, 90% sont renouvelés. De plus 240 nouveaux abonnements sont souscrits.
On note (u_n) le nombre d'abonnements du journal au bout de *n* mois à partir du 01/01/2015. On a $u_0 = 15000$

1) Calculer u_1 et u_2, puis interpréter ces résultats pour le journal.
2) Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.
3) En estimant que l'évolution des abonnements reste celle montrée par l'étude, prévoir le nombre d'abonnés au journal le 01/01/2025.

Exercice 4C.8 : Cible

1) Soit O un point du plan et pour chaque entier naturel *n* non nul, on note C_n le cercle de centre O dont le rayon mesure *n* cm. Montrer que les rayons des cercles forment une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Pour chaque entier naturel n non nul, on note A_n l'aire en cm^2 du disque de rayon n. La suite (A_n) est-elle arithmétique ?
3) On note S_1 l'aire du disque de rayon 1 cm $(S_1 = A_1)$ et, pour chaque entier naturel $n \geqslant 2$, on note S_n l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_n et C_{n-1}.

   a) Démontrer que la suite (S_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

   b) Déterminer l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_{12} et C_{11}. Étudier le comportement d'une suite arithmétique.

<u>Exercice 4C.9 :</u> Sens de variation et limites

Déterminer dans chaque cas, le sens de variation et la limite de (u_n).

1) $u_n = -\frac{1}{3}n + 4$ 2) $u_n = 5n - \frac{3}{7}$ 3) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - u_{n+1} = \frac{13}{14} \end{cases}$

<u>Exercice 4C.10 :</u> Utiliser une suite auxiliaire.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$.

1) Conjecturer le sens de variation de (u_n).
2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. On admet, ce que l'on pourra prouver en terminale par récurrence, que la suite (v_n) prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
3) a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.

   b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

   c) Justifier le sens de variation de (u_n) conjecturé à la question 1).

<u>Exercice 4C.11 :</u> Coût total

On dispose d'un crédit de 414 000 euros pour atteindre dans un désert une nappe souterraine. Le coût du forage est fixé à 1000 euros pour le premier mètre creusé, 1200 pour le deuxième, 1400 pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 200 euros par mètre creusé.

On pose $u_0 = 1000$, $u_1 = 1200, \dots u_n$ désigne donc le coût en euros du $(n+1)^{\text{ème}}$ mètre creusé.

1) a) Calculer u_5.

   b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) Déduire du b) la nature de la suite (u_n).

   D) Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_n le coût total en euros d'un puits de n mètres. Déterminer le coût total d'un puits de n mètres.
3) Déterminer la profondeur maximale que l'on peut atteindre avec le crédit de 414 000 euros.

<u>Exercice 4C.12 :</u>

Pour respecter une nouvelle norme antipollution, un groupe industriel s'engage à réduire chaque année sa quantité de rejets polluants de 6 %.

En 2015, la quantité de rejets polluants était de 50 000 tonnes.

1) Quel a été la quantité de rejets polluants en 2017 ?
2) Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de rejets polluants pour l'année 2015+n.

On a donc $r_0 = 50\,000$.

a) Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n. En déduire la nature de la suite (r_n).

b) Donner l'expression de r_n en fonction de n.

c) Étudier le sens de variation de la suite (r_n).

3) La direction du groupe industriel souhaite connaître l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin de déterminer au bout de combien d'années la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

```
R=50000
N=0
while R …
    R=…
    N=N+1
print(N)
```

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de la variable N calculée par cet algorithme.
En déduire l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

<u>Exercice 4C.13 :</u>

En 2007 la consommation de pétrole était de 31 milliards de barils.
Pour tenir compte des engagements internationaux à réduire la consommation de pétrole, on supposera que celle-ci diminue de 2% par an.
On note C_n la consommation mondiale de pétrole en milliards de barils l'année 2007+n.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (C_n).
2) Exprimer (C_n) en fonction de n.
3) Estimer la consommation mondiale en 2025.
4) Déterminer la consommation mondiale totale de pétrole de 2007 à 2025.
5) En 2007 on évalue les quantités de pétrole restantes à exploiter à 1238 milliards de barils, pendant combien d'années pourra-t-on exploiter le pétrole ?

Exercice 4C.1 :

Eric a fait une randonnée de 3 jours. Chaque jour, le nombre de kilomètres à parcourir était égal aux $\frac{3}{4}$ *du nombre de kilomètres parcourus la veille. Au total, en 3 jours il a fait 83,25 km.*
Combien de kilomètres a-t-il fait le 1er jour ?

Soit x le nombre de kilomètres réalisés le premier jour :

→le deuxième jour, la distance parcourue a été égale à $\frac{3}{4}x$

→le troisième jour, la distance parcourue a été égale à $\frac{3}{4}x\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}x$

D'après l'énoncé :

$$x+\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}x=83,25 \iff \frac{16}{16}x+\frac{12}{16}x+\frac{9}{16}x=83,25 \iff \frac{37}{16}x=83,25 \iff x=83,25\times\frac{16}{37}=36$$

Le premier jour, Eric a parcouru 36 kilomètres.

Exercice 4C.2 :

Ce nouveau magasin bio fait fureur. Depuis le jour de son ouverture, chaque jour le nombre de clients a augmenté de 5%. *Au soir du 10ème jour, le directeur du magasin a annoncé fièrement à ses employés qu'en 10 jours le magasin avait reçu 1258 clients. Combien de clients le magasin a-t-il reçus le premier jour ?*

Chaque jour, le nombre de clients est multiplié par 1,05.

On peut définir une suite géométrique (v_n) par : $\begin{cases} v_1 \\ v_{n+1}=1,05\times v_n \end{cases}$.

L'expression générale de cette suite est :

$$v_n=v_1\times q^{n-1}=v_1\times 1,05^{n-1}$$

D'après le directeur du magasin :

$$v_1+v_2+...+v_{10}=\sum_{i=1}^{10}v_i=1258$$

$$\iff v_1\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}=1258$$

$$\iff v_1\times\frac{1-1,05^{10}}{1-1,05}=1258$$

$$\iff v_1=1258\times\frac{1-1,05}{1-1,05^{10}}\simeq 100.$$

Le premier jour, le magasin avait reçu 100 clients.

Exercice 4C.3 :

Deux rescapés creusent un puits dans le désert.
Ils creusent 3 mètres le premier jour, puis 3,10 mètres le deuxième, 3,20 mètres le troisième, et toujours 10 centimètres de plus chaque jour. L'eau est à une profondeur de 300 mètres.
Combien de jours leur faudra-t-il pour atteindre l'eau ?

On peut définir une suite arithmétique (u_n) par : $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=u_n+0,1 \end{cases}$.

Son expression générale est :

$$u_n=u_1+(n-1)\times r=3+0,1(n-1)=3+0,1n-0,1=2,9+0,1n$$

D'après l'énoncé, on voudrait trouver le nombre de jours n à partir duquel :

$$u_1+u_2+...+u_n\geq 300$$

$\Leftrightarrow \ (u_1+u_n)\times\dfrac{\text{nombre de termes}}{2}\geq 300$

$\Leftrightarrow \ (3+2,9+0,1n)\times\dfrac{n}{2}\geq 300$

$\Leftrightarrow \ 5,9\times\dfrac{n}{2}+0,1n\times\dfrac{n}{2}\geq 300$

$\Leftrightarrow \ \dfrac{5,9}{2}\times n+\dfrac{0,1}{2}\times n^2-300\geq 0$

$\Leftrightarrow \ 5,9n+0,1n^2-600\geq 0$ *(en multipliant les deux membres par 2)*

$\Leftrightarrow \ n^2+59n-6000\geq 0$ *(en multipliant les deux membres par 10)*

$\Delta=59^2-4\times1\times(-6000)=27481$ donc l'équation $n^2+59n-6000=0$ possède deux solutions :

$$n_1=\frac{-59-\sqrt{27\,481}}{2\times1}\simeq -112,4 \quad \text{et} \quad n_2=\frac{-59+\sqrt{27\,481}}{2\times1}\simeq 53,4 .$$

$a=1$ donc la parabole est « orientée vers le haut » ou le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines

En intégrant le fait que n est un entier positif représentant le nombre de jours, on peut conclure que :

$n^2+59n-6000\geq 0$ si $n\geq 53,4$

Donc à partir du 54ème jour.

Exercice 4C.4 :

Deux rescapés veulent sortir du désert. Ils parcourent 10 kilomètres le premier jour.
En raison de la fatigue, ils parcourent 5% de moins à chaque jour qui passe.
Combien de jours seront nécessaires pour atteindre le bout du désert situé à 150 kilomètres ?

Chaque jour, le nombre de kilomètres parcourus est multiplié par 0,95.

On peut définir une suite géométrique (v_n) par : $\begin{cases} v_1=10 \\ v_{n+1}=0,95\times v_n \end{cases}$.

L'expression générale de cette suite est :

$v_n=v_1\times q^{n-1}=10\times0,95^{n-1}$.

Pour sortir du désert, il faut que :

$v_1+v_2+...+v_n\geq 150$

$\Leftrightarrow \ v_1\times\dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}\geq 150$

$\Leftrightarrow \ 10\times\dfrac{1-0,95^n}{1-0,95}\geq 150$

$\Leftrightarrow \ 10\times\dfrac{1-0,95^n}{0,05}\geq 150$

$\Leftrightarrow \ 200\times(1-0,95^n)\geq 150$

$\Leftrightarrow \ 1-0,95^n\geq\dfrac{150}{200}$

$\Leftrightarrow \ -0,95^n\geq\dfrac{150}{200}-1$

$\Leftrightarrow \ -0,95^n\geq\dfrac{-50}{200}$

$\Leftrightarrow \ -0,95^n\geq -0,25$

$\Leftrightarrow \ 0,95^n\leq 0,25$

Avec la calculatrice, on trouve : $0,95^{27}\simeq 0,2503$ et $0,95^{28}\simeq 0,2378$: à partir du 28ème jour.

Exercice 4C.5 :

On place 300 euros sur un livret d'épargne rémunéré à 4% par an.
Chaque année les intérêts s'accumulent et on n'effectue ni dépôt ni retrait.
Quel sera le montant sur le livret au bout de 15 ans ?

Chaque année, le montant du livret est multiplié par 1,04.

On peut définir une suite géométrique (v_n) par : $\begin{cases} v_0 = 300 \\ v_{n+1} = 1,04 \times v_n \end{cases}$.

L'expression générale de cette suite est :

$$v_n = v_0 \times q^n = 300 \times 1,04^n.$$

Dans 15 ans, le montant sera égal à :

$$v_{15} = 300 \times 1,04^{15} \simeq 540,25\,€.$$

Exercice 4C.6 :

Une usine assure, en 2000, une production de 100 000 articles. Elle s'engage à augmenter sa production de 3% pendant 5 ans.

1) *Quelle sera sa production en 2005 ?*

Chaque année, la production est multipliée par 1,03.

On peut définir une suite géométrique (v_n) par : $\begin{cases} v_0 = 100\,000 \\ v_{n+1} = 1,03 \times v_n \end{cases}$.

L'expression générale de cette suite est :

$$v_n = v_0 \times q^n = 100\,000 \times 1,03^n.$$

En 2005, la production sera égale à :

$$v_5 = 100\,000 \times 1,03^5 \simeq 115927 \text{ articles.}$$

2) *Combien d'articles auront été fabriqués de 2000 à 2005 ?*

$$v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_5 = \sum_{i=0}^{5} v_i = v_0 \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} = 100\,000 \times \frac{1-1,03^6}{1-1,03} \simeq 646840,9884$$

Soit 646840 articles (le 646 841ème n'aura pas été terminé).

Exercice 4C.7 : Abonnements

Le 01/01/2015, un journal comptait 15 000 abonnés.
Une étude a montré que, chaque mois, 850 abonnements arrivent à échéance. Sur ces 850 abonnements, 90% sont renouvelés. De plus 240 nouveaux abonnements sont souscrits.
On note (u_n) le nombre d'abonnements du journal au bout de n mois à partir du 01/01/2015. On a $u_0 = 15000$.

1) *Calculer u_1 et u_2, puis interpréter ces résultats pour le journal.*

$$u_1 = u_0 + 850 \times 0,9 + 240 = 16005$$
$$u_2 = u_1 + 850 \times 0,9 + 240 = 17010.$$

Le 1er février 2015, le journal aura 16005 abonnés, et 17010 abonnés le 1er mars 2015.

2) *Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.*

$$u_{n+1} = u_n + 850 \times 0,9 + 240 = u_n + 1005.$$

La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 1005$. Son expression générale est :

$$u_n = u_0 + n \times r = 15000 + 1005n$$

3) *En estimant que l'évolution des abonnements reste celle montrée par l'étude, prévoir le nombre d'abonnés au journal le 01/01/2025.*

Du 1er janvier 2015 au 1er janvier 2025 vont s'écouler 120 mois :

$$u_{120} = 15000 + 1005 \times 120 = 135600 \text{ abonnés.}$$

Exercice 4C.8 : Cible

1) *Soit O un point du plan et pour chaque entier naturel n non nul, on note C_n le cercle de centre O dont le rayon mesure n cm. Montrer que les rayons des cercles forment une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.*

Soit r_n la longueur du rayon du cercle C_n. Ainsi :

$r_1 = 1$, $r_2 = 2$, …et par définition pour tout entier n non nul : $r_{n+1} = r_n + 1$

La suite (r_n) est arithmétique de premier terme $r_1 = 1$ et de raison 1.

2) *Pour chaque entier naturel n non nul, on note A_n l'aire en cm^2 du disque de rayon n. La suite (A_n) est-elle arithmétique ?*

$$A_1 = \pi \times r_1^{\ 2} = \pi \times 1^2 = \pi$$

$$A_2 = \pi \times r_2^{\ 2} = \pi \times 2^2 = 4\pi$$

$$A_3 = \pi \times r_3^{\ 2} = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

$\rightarrow A_2 - A_1 = 4\pi - \pi = 3\pi$ donc $A_2 = A_1 + 3\pi$

$\rightarrow A_3 - A_2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi$ donc $A_3 = A_2 + 5\pi$

L'écart n'est pas constant, la suite (A_n) n'est pas arithmétique.

3) On note S_1 l'aire du disque de rayon 1 cm $(S_1 = A_1)$ et, pour chaque entier naturel $n \geqslant 2$, on note S_n l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_n et C_{n-1}.

a) Démontrer que la suite (S_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

$$S_1 = \pi \times 1^2 = \pi$$

$$S_2 = A_2 - A_1 = 4\pi - \pi = 3\pi$$

$$S_3 = A_3 - A_2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi$$

$$S_4 = A_4 - A_3 = 16\pi - 9\pi = 7\pi$$

$$S_n = A_n - A_{n-1} = \pi \times n^2 - \pi \times (n-1)^2 = \pi \times \left[n^2 - (n-1)^2\right] = \pi \times \left[n^2 - n^2 + 2n - 1\right] = \pi(2n-1)$$

$$S_{n+1} = A_{n+1} - A_n = \pi \times (n+1)^2 - \pi \times n^2 = \pi \times \left[(n+1)^2 - n^2\right] = \pi \times \left[n^2 + 2n + 1 - n^2\right] = \pi(2n+1)$$

On calcule $S_{n+1} - S_n$:

$$S_{n+1} - S_n = \pi(2n+1) - \pi(2n-1) = \pi\left[(2n+1) - (2n-1)\right] = \pi[2n+1-2n+1] = 2\pi .$$

Donc la suite (S_n) est arithmétique de raison 2π et de premier terme $S_1 = \pi$.

b) *Déterminer l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_{12} et C_{11}. Étudier le comportement d'une suite arithmétique.*

L'aire cherchée est égale à $S_{12} = A_{12} - A_{11}$.

L'expression générale de la suite (S_n) est :

$$S_n = S_1 + (n-1)r = \pi + (n-1) \times 2\pi = 2\pi n + \pi - 2\pi = 2\pi n - \pi .$$

On obtient :

$$S_{12} = 2\pi \times 12 - \pi = 23\pi \text{ cm}^2 .$$

Exercice 4C.9 : Sens de variation et limites

Déterminer dans chaque cas, le sens de variation et la limite de (u_n).

1) $u_n = -\frac{1}{3}n + 4$ donc $u_{n+1} = -\frac{1}{3}(n+1) + 4 = -\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + 4 = -\frac{1}{3}n + \frac{11}{3}$

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}n+\frac{11}{3}-\left(-\frac{1}{3}n+4\right)=-\frac{1}{3}n+\frac{11}{3}+\frac{1}{3}n-4=-\frac{1}{3}$$

La suite (u_n) est arithmétique de raison négative $r=-\frac{1}{3}$, elle est décroissante et sa limite est $-\infty$.

2) $u_n=5n-\frac{3}{7}$ donc $u_{n+1}=5(n+1)-\frac{3}{7}=5n+5-\frac{3}{7}=5n+\frac{32}{7}$

$$u_{n+1}-u_n=5n+\frac{32}{7}-\left(5n-\frac{3}{7}\right)=5n+\frac{32}{7}-5n+\frac{3}{7}=\frac{35}{7}=5$$

La suite (u_n) est arithmétique de raison positive $r=5$, elle est croissante et sa limite est $+\infty$.

3) $\begin{cases} u_0=2 \\ u_n-u_{n+1}=\frac{13}{14} \end{cases}$

La suite (u_n) est arithmétique de raison positive $r=\frac{13}{14}$, elle est croissante et sa limite est $+\infty$.

Exercice 4C.10 : Utiliser une suite auxiliaire.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$.

1) *Conjecturer le sens de variation de (u_n).*

$$u_1=u_{0+1}=\frac{u_0}{1+u_0}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$u_2=u_{1+1}=\frac{u_1}{1+u_1}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$u_3=u_{2+1}=\frac{u_2}{1+u_2}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Il semble que pour tout entier n : $u_n=\frac{1}{n+1}$.

2) *Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=\frac{1}{u_n}$. On admet, ce que l'on pourra prouver en terminale par récurrence, que la suite (v_n) prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.*

3) ***a)*** *Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.*

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}}=1\times\frac{1+u_n}{u_n}=\frac{1}{u_n}+1$$

Ainsi :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_n}+1-\frac{1}{u_n}=1$$

La suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

b) *En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.*

Le premier terme de la suite (v_n) est : $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$ d'où son expression générale pour tout entier n :

$$v_n = v_0 + nr = 1 + n.$$

La relation $v_n = \frac{1}{u_n}$ se traduit aussi par : $u_n = \frac{1}{v_n}$ d'où l'expression générale de la suite (u_n) :

$$u_n = \frac{1}{n+1}.$$

c) *Justifier le sens de variation de (u_n) conjecturé à la question 1).*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)+1}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+2} \times \frac{n+1}{1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Or pout tout entier n positif :

$$0 < \frac{n+1}{n+2} < 1$$

Tous les termes de la suite (u_n) sont positifs et $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$: la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 4C.11 : Coût total

On dispose d'un crédit de 414 000 euros pour atteindre dans un désert une nappe souterraine. Le coût du forage est fixé à 1000 euros pour le premier mètre creusé, 1200 pour le deuxième, 1400 pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 200 euros par mètre creusé.

On pose $u_0 = 1000$, $u_1 = 1200, \dots, u_n$ désigne donc le coût en euros du (n+1)^{ème} mètre creusé.

1) ***a)*** *Calculer u_5.*

$$u_5 = u_0 + 5 \times 200 = 1000 + 1000 = 2000.$$

b) *Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

D'après l'énoncé :

$$u_{n+1} = u_n + 200$$

c) *Déduire du b) la nature de la suite (u_n).*

La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 200$ et de premier terme $u_0 = 1000$.

d) *Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

L'expression générale de la suite (u_n) est, pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + nr = 1000 + 200n.$$

2) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_n le coût total en euros d'un puits de n mètres. Déterminer le coût total d'un puits de n mètres.*

Un puits de 2 mètres coûterait $u_0 + u_1 = 1000 + 1200 = 2200$ €

Un puits de 3 mètres coûterait $u_0 + u_1 + u_2 = 1000 + 1200 + 1400 = 3600$ €

Donc un puits de n mètres coûterait :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = (u_0 + u_{n-1}) \times \frac{\text{nombre de termes}}{2} = (1000 + 1000 + 200(n-1)) \times \frac{n}{2}$$

$$S_n = (1800 + 200n) \times \frac{n}{2} = n(900 + 100n)$$

3) *Déterminer la profondeur maximale que l'on peut atteindre avec le crédit de 414 000 euros.*

$$S_n \le 414000 \iff 100n^2 + 900n \le 414000 \iff 100n^2 + 900n - 414000 \le 0$$

$\Leftrightarrow \quad n^2+9n-4140\leq 0$

$\Delta = 9^2-4\times 1\times(-4140)=16641=129^2$ donc l'équation $n^2+9n-4140=0$ possède deux solutions :

$$n_1=\frac{-9-129}{2\times 1}=-69 \quad \text{et} \quad n_2=\frac{-9+129}{2\times 1}=60.$$

$a=1$ donc la parabole est « orientée vers le haut » ou le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines
Ainsi, en intégrant que n est une variable positive comptabilisant le nombre de mètres creusés, on obtient :

$$n^2+9n-4140\leq 0 \text{ si } n\leq 60.$$

Ce budget permettra d'atteindre 60 mètres de profondeur.

Exercice 4C.12 :

Pour respecter une nouvelle norme antipollution, un groupe industriel s'engage à réduire chaque année sa quantité de rejets polluants de 6 %.
En 2015, la quantité de rejets polluants était de 50 000 tonnes.

1) *Quel a été la quantité de rejets polluants en 2017 ?*
Chaque année, la quantité de rejets polluants est multipliée par 0,94.
Ainsi en 2017 :
$50\,000\times 0,94\times 0,94=44180$ →soit 44 180 tonnes.

2) *Pour tout entier naturel I, on note r_n la quantité, en tonnes, de rejets polluants pour l'année 2015+n.*
On a donc $r_0=50\,000$.

a) *Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n. En déduire la nature de la suite (r_n).*
Pour tout entier naturel n :
$$r_{n+1}=r_n\times 0,94$$
Donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q=0,94$ et de premier terme $r_0=50\,000$.

b) *Donner l'expression de r_n en fonction de n.*
$$r_n=r_0\times q^n=50\,000\times 0,94^n.$$

c) *Étudier le sens de variation de la suite (r_n).*
$r_0>0$ et $0<0,94<1$ donc la suite (r_n) est décroissante.

3) *La direction du groupe industriel souhaite connaître l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.*
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin de déterminer au bout de combien d'années la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

```
R=50000
N=0
while R >20000 :
    R=R*0.94
    N=N+1
print(N)
```

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de la variable N calculée par cet algorithme.
En déduire l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.
Une diminution de 60% mène à un seuil égal à :
$50\,000\times 0,4=20\,000$ tonnes.
On peut ainsi compléter l'algorithme ci-dessus.
A la calculatrice, on obtient :
$$50\,000\times 0,94^{14}\simeq 21026,2$$
$$50\,000\times 0,94^{15}\simeq 19764,6$$
Soit au bout de la 15ème année, en 2030.

Exercice 4C.13 :

En 2007 la consommation de pétrole était de 31 milliards de barils. Pour tenir compte des engagements internationaux à réduire la consommation de pétrole, on supposera que celle-ci diminue de 2% par an.
On note C_n la consommation mondiale de pétrole en milliards de barils l'année 2007+n.

1) *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (C_n).*

Chaque année, la consommation de pétrole doit être multipliée par 0,98.
Ainsi pour tout entier naturel n :

$$C_{n+1} = C_n \times 0,98$$

Donc la suite (C_n) est géométrique de raison $q = 0,98$ et de premier terme $C_0 = 31$.

2) *Exprimer (C_n) en fonction de n.*

$$C_n = C_0 \times q^n = 31 \times 0,98^n.$$

3) *Estimer la consommation mondiale en 2025.*

Pour 2025, on doit calculer :

$$C_{18} = 31 \times 0,98^{18} \simeq 21,55$$

Soit une consommation mondiale totale d'environ 21,55 milliards de barils.

4) *Déterminer la consommation mondiale totale de pétrole de 2007 à 2025.*

Le pourcentage de baisse de la consommation de pétrole est :

$$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{21,55-31}{31} \simeq -0,305 \simeq -\frac{30,5}{100} \simeq -30,5\%$$

Soit une baisse d'environ 30,5 %.

5) *En 2007 on évalue les quantités de pétrole restantes à exploiter à 1238 milliards de barils, pendant combien d'années pourra-t-on exploiter le pétrole ?*

En considérant que les quantités de pétrole restantes à exploiter soient stables, on peut définir une suite (r_n) déterminant les quantités de pétrole restantes, donc $r_0 = 1238$.

Deux possibilités de compréhension de cette question :

- La consommation reste stable et égale à 31 milliards de barils par an,
- La consommation diminue selon la suite (C_n) étudiée ci-dessus.

Premier cas : en consommation constante :

Pour tout entier naturel n :

$$r_{n+1} = r_n - 31$$

La suite (r_n) est arithmétique de premier terme $r_0 = 1238$ et de raison $r = -31$.

Son expression générale est :

$$r_n = r_0 + nr = 1238 - 31n$$

On doit trouver à partir de quel rang la suite (r_n) devient négative :

$$r_n < 0 \iff 1238 - 31n < 0 \iff -31n < -1238 \iff n > \frac{-1238}{-31} \iff n > 39,9$$

Il y aura pénurie de pétrole la 40ème année.

Deuxième cas : avec consommation réduite :

Pour tout entier naturel n :

$$r_{n+1} = r_n - C_n = r_n - 31 \times 0,98^n$$

La suite (r_n) est quelconque de premier terme $r_0 = 1238$.

Un programme est indispensable :

```
R=1238
N=0
while R>0 :
    N=N+1
```

```
        R=R-31*0.98**N
    print(N)
```

On trouve N=84

→il y aura pénurie de pétrole la 84ème année, en 2091.