EXERCICE 4A.1

On considère la fonction *f* définie pour tout réel *x* par :

$$f(x) = e^{2x} - e^{x}$$

On appelle f' la fonction dérivée de *f* et C_f la courbe représentative de *f* dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

On remarquera que, pour tout réel *x*, on a :

$$e^{2x} - e^{x} = e^{x}\left(e^{x} - 1\right)$$

1. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel *x* et étudier son signe.

b. Etudier le signe de la dérivée.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

3. Tracer la droite T et la courbe C_f.

EXERCICE 4A.2

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - e^{x} - 6$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a pour tout nombre réel *x* : $f'(x) = e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)$

b. Étudier les variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

2. a. Dresser le tableau de variations de la fonction *f* en précisant les limites de *f*.

b. Montrer que le minimum de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$ est égal à $\frac{-25}{4}$.

EXERCICE 4A.3

Soit la fonction *f* définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + 2x - 3$

Soit C_f la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Étude des variations de la fonction *f*

a. Montrer que, pour tout nombre réel *x*,

$$f'(x) = \frac{2e^{x} - 1}{e^{x}}$$

où f' est la dérivée de la fonction *f*.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$

c. Etudier le signe de la dérivée f' de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

d. Etablir le tableau de variations de la fonction *f*.

e. Calculer $f(1)$ et déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

4. Tracer la courbe C_f dans le repère (O,I,J)

EXERCICE 4A.4

Partie A

On note *g* la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $g(x) = e^{-x}(-3x+1)+1$

$g(x) = e^{-x}(-3x+1)+1$

1. Calculer la dérivée g' de la fonction *g*.

2. Étudier le sens de variation de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variation (On ne demande pas les limites de *g* en $+\infty$ et en $-\infty$).

3. Calculer $g\left(\frac{4}{3}\right)$ et en déduire le signe de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère maintenant la fonction *f* définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = e^{-x}(3x+2) + x$$

1. Étude des variations de *f*.

a. Calculer la dérivée f' de la fonction *f*, et démontrer que, pour tout réel *x* : $f'(x) = g(x)$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction *f*.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

EXERCICE 4A.1

On considère la fonction *f* définie pour tout réel *x* par :

$$f(x)=e^{2x}-e^{x}$$

On appelle f' la fonction dérivée de f et C_f la courbe représentative de *f* dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) d'unité graphique 4 cm.

On remarquera que, pour tout réel *x*, on a :

$$e^{2x}-e^{x}=e^{x}\times e^{x}-e^{x}\times 1=e^{x}\left(e^{x}-1\right)$$

1. a.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}>0$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 2e^{x}-1>0 \iff e^{x}>\frac{1}{2}$$

$$\iff e^{x}>e^{\ln\frac{1}{2}} \iff x>\ln\frac{1}{2}$$

Car la fonction exponentielle est croissante.

Si $x>\ln\frac{1}{2}$: $f'(x)>0$ et si $x<\ln\frac{1}{2}$: $f'(x)<0$

b. $f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

c. Tableau de variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

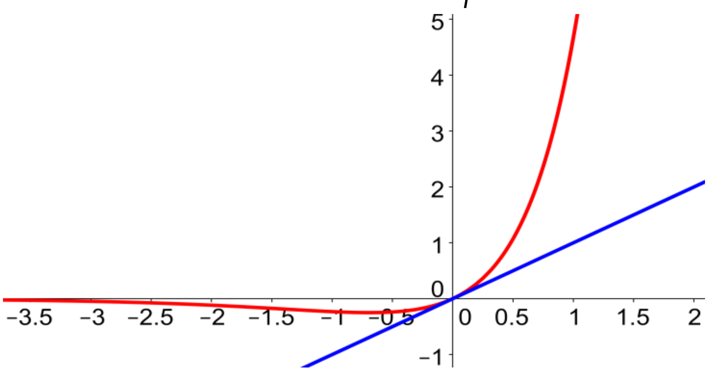
2. Equation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 : $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$$f'(0)=2e^{2\times 0}-e^{0}=2-1=1$$

$$f(0)=e^{2\times 0}-e^{0}=1-1=0$$

Donc : $T: y=1(x-0)+0$ soit : $T: y=x$

3. Tracer la droite T et la courbe C_f.



EXERCICE 4A.2

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^{2x}-e^{x}-6$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. a. $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=2e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$$

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}>0$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ 2e^{x}-1>0 \iff e^{x}>\frac{1}{2} \iff x>\ln\frac{1}{2}$$

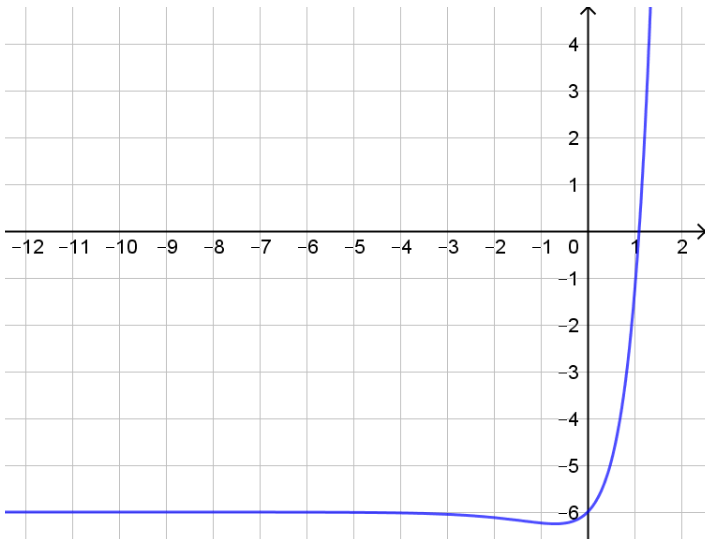
Si $x>\ln\frac{1}{2}$: $f'(x)>0$

2. a. Tableau de variations de la fonction *f* :

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	$\searrow$	$-\frac{25}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Minimum de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$:

$$f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=-\frac{25}{4}$$



EXERCICE 4A.3

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-x}+2x-3$

Soit C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Étude des variations de la fonction *f*

a. $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-e^{-x}+2=-\dfrac{1}{e^x}+2=\dfrac{-1+2e^x}{e^x}$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x)=0$:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -1+2e^x=0 \Leftrightarrow e^x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x=e^{\ln\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}$$

c. Signe de la dérivée f' sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow -1+2e^x>0 \Leftrightarrow e^x>\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x>e^{\ln\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x>\ln\frac{1}{2}$$

→Si $x\in\left]\ln\frac{1}{2};+\infty\right[$: $f'(x)>0$

d. Tableau de variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-2\ln 2-1$	↗	$+\infty$

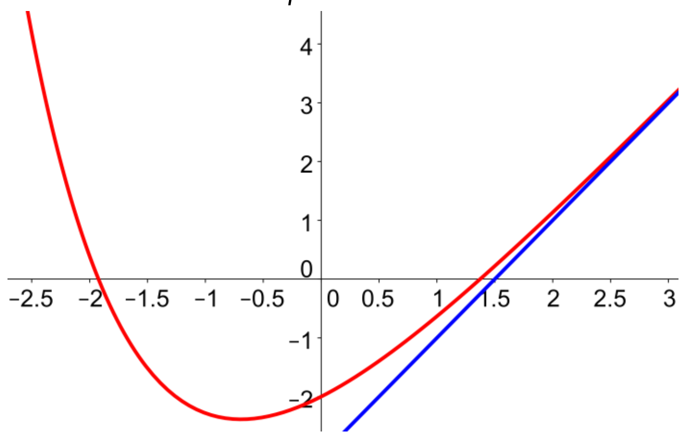
$f\left(\ln\frac{1}{2}\right)\simeq -3{,}89$

e. $f(1)=e^{-1}+2\times1-3=e^{-1}-1$

f est strictement croissante sur $[0;1]$ et $f(1)<0$

donc $\forall x\in[0;1]$: $f(x)<0$

2. Tracer la courbe C_f dans le repère (O,I,J)



EXERCICE 4A.4

Partie A

On note g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $g(x)=e^{-x}(-3x+1)+1$

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=-e^{-x}(-3x+1)+e^{-x}\times(-3)$

$$g'(x)=e^{-x}\times(-1)\times(-3x+1)+e^{-x}\times(-3)$$

$$g'(x)=e^{-x}(3x-1)+e^{-x}\times(-3)$$

$$g'(x)=e^{-x}\left[(3x-1)+(-3)\right]=e^{-x}(3x-4)$$

2. Sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x}>0$ et $3x-4>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{4}{3}$

Donc si $x>\dfrac{4}{3}$, alors $g'(x)>0$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$g\left(\frac{4}{3}\right)$	↗	

3. $g\left(\dfrac{4}{3}\right)=e^{-\frac{4}{3}}\left(-3\times\dfrac{4}{3}+1\right)+1=e^{-\frac{4}{3}}(-4+1)+1$

$$g\left(\frac{4}{3}\right)=-3e^{-\frac{4}{3}}+1\simeq 0{,}21$$

$g\left(\dfrac{4}{3}\right)>0$ donc l'étude de la fonction g sur les intervalles $\left]-\infty;\dfrac{4}{3}\right]$ et $\left[\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ permet d'affirmer que $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)>0$.

Partie B

- On considère maintenant la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x)=e^{-x}(3x+2)+x$$

On note C_f sa courbe représentative dans le repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

1. Étude des variations de *f*.

a. Calculer la dérivée f' de la fonction *f*, et démontrer que, pour tout réel x : $f'(x)=g(x)$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=-e^{-x}\times(3x+2)+e^{-x}\times3+1$$

$$=e^{-x}\times\left[-(3x+2)+3\right]+1$$

$$=e^{-x}(-3x+1)+1=g(x)$$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction *f*.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$