EXERCICE 4B.1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^{2x}}$$

1) Donner l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1;10]$.

EXERCICE 4B.2 (EXERCICE AVANCE)

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

1. **Etude d'une fonction auxiliaire.**
   a. Soit la fonction g dérivable, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2e^x - 1$.
   Etudier les variations de g.
   b. On admet qu'il existe un réel $a \simeq 0{,}7035$ tel que $g(a) = 0$.
   Donner le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.
2. **Etude de la fonction *f*.**
   a. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

EXERCICE 4B.3

Résoudre l'équation : $2e^{2x} + 3e^x - 20 = 0$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – *Montpellier*

EXERCICE 4B.1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=\frac{2e^{x}-1}{e^{2x}}$$

1) *Donner l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.*

On pose : $u(x)=2e^{x}-1$ et $v(x)=e^{2x}$

$u'(x)=2e^{x}$ et $v'(x)=2e^{2x}$

$$f'(x)=\frac{2e^{x}\times e^{2x}-\left(2e^{x}-1\right)\times 2e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^{2}}=\frac{e^{2x}\left[2e^{x}-2\left(2e^{x}-1\right)\right]}{e^{2x}\times e^{2x}}=\frac{2e^{x}-4e^{x}+2}{e^{2x}}=\frac{-2e^{x}+2}{e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{2\left(1-e^{x}\right)}{e^{2x}}$$

2) *Etablir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1;10]$.*

Etude du signe de la dérivée :

Pour tout réel x, $e^{2x}>0$.

$$\begin{aligned} f'(x)>0 &\Leftrightarrow 1-e^{x}>0\\ &\Leftrightarrow -e^{x}>-1\\ &\Leftrightarrow -e^{x}\times(-1)<-1\times(-1)\\ &\Leftrightarrow e^{x}<1\\ &\Leftrightarrow e^{x}<e^{0}\\ &\Leftrightarrow x<0 \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1		0		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-1{,}95$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-4{,}85\times10^{8}$

avec :

$$f(-1)=\frac{2e^{-1}-1}{e^{2\times(-1)}}=\frac{2e^{-1}-1}{e^{-2}}=\frac{2\times\frac{1}{e}-1}{\frac{1}{e^{2}}}=\left(\frac{2}{e}-1\right)\times e^{2}=2e-e^{2}\simeq-1{,}95$$

$$f(0)=\frac{2e^{0}-1}{e^{2\times0}}=2-1=1$$

$$f(10)=\frac{2e^{-10}-1}{e^{2\times(-10)}}=\frac{2e^{-10}-1}{e^{-20}}=\frac{2\times\frac{1}{e^{10}}-1}{\frac{1}{e^{20}}}=\left(\frac{2}{e^{10}}-1\right)\times e^{20}=2e^{10}-e^{20}\simeq-485\,121\,142{,}5$$

EXERCICE 4B.2

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ *par :* $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$.

1. ***Etude d'une fonction auxiliaire.***

   a. *Soit la fonction g dérivable, définie sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$ *par :* $g(x)=x^2e^x-1$.

   Etudier le sens de variation de la fonction g.

   On pose : $u(x)=x^2$ et $v(x)=e^x$

   $u'(x)=2x$ et $v'(x)=e^x$

   $\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad g'(x)=2x\times e^x+x^2\times e^x=\left(2x+x^2\right)e^x=(2+x)xe^x$.

   $\forall x\in\,]0\,;+\infty[\;:\; xe^x>0$ et $2+x>0 \;\Leftrightarrow\; x>-2$.

   Donc la dérivée g' est strictement positive et la fonction g est strictement croissante.

   b. *On admet qu'il existe un réel* $a\simeq 0{,}7035$ *tel que* $g(a)=0$.

   Déterminer le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

x	0	0,7035	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		0 $\nearrow$	

   Si $x\in\,]0\,;a[$, la fonction g est négative, et si $x\in\,]a\,;+\infty[$, la fonction g est positive.

2. ***Etude de la fonction f.***

   a. *On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$.

   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

   $$f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2e^x-1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}.$$

   b. *En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$.

   $\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\; x^2>0$

   Si $x\in\,]0\,;a[$, $g(x)<0$, donc $f'(x)<0$ et la fonction f est décroissante.

   Si $x\in\,]a;+\infty[$, $g(x)>0$, donc $f'(x)>0$ et la fonction f est croissante.

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 4B.3

Résoudre l'équation : $2e^{2x}+3e^x-20=0 \;\Leftrightarrow\; 2\left(e^x\right)^2+3e^x-20=0$

On pose $X=e^x$, l'équation devient : $2X^2+3X-20=0$.

Discriminant : $\Delta = 3^2 - 4\times 2\times(-20) = 9+160 = 169 = 13^2$ donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{-3-13}{2\times 2} = \frac{-16}{4} = -4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-3+13}{2\times 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Or $X = e^x$ donc $x = \ln X$.

$X_1 < 0$ donc on ne retient pas cette solution.

$X_2 = \frac{5}{2}$ donc $x_2 = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$. Ainsi $S = \left\{\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right\}$.