Vers les équations différentielles

Exercice 1 : ChingAtome

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=e^{2x+3}$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a la relation :
$$2f(x)-f'(x)=0.$$
2. a. Parmi les expressions suivantes d'une fonction g, laquelle vérifie la relation $2g(x)-g'(x)=0$:
   - $g(x)=e^{2x+3}+4$
   - $g(x)=e^{8x+12}$
   - $g(x)=4e^{2x+3}$
   - $g(x)=e^{-2x-3}$

   b. Donner l'expression d'une troisième fonction h vérifiant la relation $2h(x)-h'(x)=0$.

Exercice 2 : ChingAtome

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=(x+1)e^{2x}$$

Montrer que la fonction f vérifie la relation :

$$f''(x)-4f'(x)+4f(x)=0.$$

Exercice 3 : ChingAtome

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=(-x-1)e^{x}$$

Montrer que la fonction f vérifie pour tout nombre réel x :

$$f''(x)-3f'(x)+2f(x)=e^{x}$$

Exercice 4 :

On considère l'équation différentielle :

$$f''(x)-3f'(x)-4f(x)=-5e^{-x}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=xe^{-x}$$

Démontrer que g est une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus.

Exercice 5 :

On considère l'équation différentielle :

$$f''(x)-f'(x)-2f(x)=(-6x-4)e^{-x}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\left(x^2+2x\right)e^{-x}$$

Démontrer que g est une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus.

Exercice 6 :

On considère l'équation différentielle :

$$f''(x)-2f'(x)+f(x)=\frac{x^2}{2}-x-1$$

Déterminer les constantes réelles a, b et c pour que la fonction définie par ax^2+bx+c soit solution de cette équation différentielle.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci - CORRIGE

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=e^{2x+3}$$

1. *Montrer que, pour tout nombre réel x, on a la relation :* $2f(x)-f'(x)=0$.

La dérivée de la fonction f est :

$$f'(x)=2e^{2x+3}$$

Ainsi :

$$2f(x)-f'(x)=2\times e^{2x+3}-2e^{2x+3}=0$$

2. *a. Parmi les expressions suivantes d'une fonction g, laquelle vérifie la relation* $2g(x)-g'(x)=0$ *:*

- $g(x)=e^{2x+3}+4$
- $g(x)=e^{8x+12}$
- $g(x)=4e^{2x+3}$
- $g(x)=e^{-2x-3}$

Les dérivées de ces quatre fonctions sont :

- $g'(x)=2e^{2x+3}$
- $g'(x)=8e^{8x+12}$
- $g'(x)=8e^{2x+3}$
- $g'(x)=-2e^{-2x-3}$

La relation : $2g(x)-g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)=2g(x)$ n'est vérifiée que pour la fonction :

$$g(x)=4e^{2x+3}$$

b. *Donner l'expression d'une troisième fonction h vérifiant la relation* $2h(x)-h'(x)=0$.

$$h(x)=6e^{2x} \text{ car } h'(x)=2\times 6e^{2x}=2\times h(x)$$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x)=(x+1)e^{2x}$

Montrer que la fonction f vérifie la relation : $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=0$.

Les dérivées première et seconde de la fonction f sont :

On pose : $u(x)=(x+1)$ et $v(x)=e^{2x}$

$u'(x)=1$ et $v'(x)=2e^{2x}$

$$f'(x)=1\times e^{2x}+(x+1)\times 2e^{2x}=\left[1+2(x+1)\right]e^{2x}=(2x+3)e^{2x}$$

On pose : $u(x)=(2x+3)$ et $v(x)=e^{2x}$

$u'(x)=2$ et $v'(x)=2e^{2x}$

$$f''(x)=2\times e^{2x}+(2x+3)\times 2e^{2x}=\left[2+2(2x+3)\right]e^{2x}=(4x+8)e^{2x}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f''(x)-4f'(x)+4f(x)&=(4x+8)e^{2x}-4\times(2x+3)e^{2x}+4\times(x+1)e^{2x}\\ &=\left[(4x+8)-4\times(2x+3)+4\times(x+1)\right]e^{2x}\\ &=\left[4x+8-8x-12+4x+4\right]e^{2x}\\ &=0 \end{aligned}$$

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x)=(-x-1)e^{x}$

Montrer que la fonction f vérifie pour tout nombre réel x : $f''(x)-3f'(x)+2f(x)=e^{x}$

Les dérivées première et seconde de la fonction f sont :

On pose : $u(x)=(-x-1)$ et $v(x)=e^x$

$u'(x)=-1$ et $v'(x)=e^x$

$$f'(x)=-e^x+(-x-1)e^x=\left[-1+(-x-1)\right]e^x=\left[-1-x-1\right]e^x=(-x-2)e^x$$

On pose : $u(x)=(-x-2)$ et $v(x)=e^x$

$u'(x)=-1$ et $v'(x)=e^x$

$$f''(x)=-e^x+(-x-2)e^x=\left[-1+(-x-2)\right]e^x=(-x-3)e^x$$

Ainsi :

$$f''(x)-3f'(x)+2f(x)=e^x$$

Exercice 4 :

On considère l'équation différentielle : $f''(x)-3f'(x)-4f(x)=-5e^{-x}$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=xe^{-x}$

Démontrer que g est une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus.

On pose : $u(x)=x$ et $v(x)=e^{-x}$

$u'(x)=1$ et $v'(x)=-e^{-x}$

$$g'(x)=e^{-x}+x\times\left(-e^{-x}\right)=(1-x)e^{-x}$$

On pose : $u(x)=1-x$ et $v(x)=e^{-x}$

$u'(x)=-1$ et $v'(x)=-e^{-x}$

$$g''(x)=-e^{-x}+(1-x)\times\left(-e^{-x}\right)=\left[-1-(1-x)\right]e^{-x}=(x-2)e^{-x}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}g''(x)-3g'(x)-4g(x)&=(x-2)e^{-x}-3\times(1-x)e^{-x}-4\times xe^{-x}\\&=\left[(x-2)-3\times(1-x)-4x\right]e^{-x}\\&=\left[x-2-3+3x-4x\right]e^{-x}\\&=-5e^{-x}\end{aligned}$$

Exercice 5 :

On considère l'équation différentielle : $f''(x)-f'(x)-2f(x)=(-6x-4)e^{-x}$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=\left(x^2+2x\right)e^{-x}$

Démontrer que g est une solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus.

On pose : $u(x)=x^2+2x$ et $v(x)=e^{-x}$

$u'(x)=2x+2$ et $v'(x)=-e^{-x}$

$$g'(x)=(2x+2)e^{-x}+\left(x^2+2x\right)\times\left(-e^{-x}\right)=\left[(2x+2)-\left(x^2+2x\right)\right]e^{-x}=\left(2-x^2\right)e^{-x}$$

On pose : $u(x)=2-x^2$ et $v(x)=e^{-x}$

$u'(x)=-2x$ et $v'(x)=-e^{-x}$

$$g''(x)=-2x\times e^{-x}+\left(2-x^2\right)\times\left(-e^{-x}\right)=\left[-2x-\left(2-x^2\right)\right]e^{-x}=\left(x^2-2x-2\right)e^{-x}$$

Ainsi :

$$g''(x)-g'(x)-2g(x)=\left(x^2-2x-2\right)e^{-x}-\left(2-x^2\right)e^{-x}-2\times\left(x^2+2x\right)e^{-x}$$
$$=\left[\left(x^2-2x-2\right)-\left(2-x^2\right)-2\left(x^2+2x\right)\right]e^{-x}$$
$$=\left[x^2-2x-2-2+x^2-2x^2-4x\right]e^{-x}$$
$$=(-6x-4)e^{-x}$$

Exercice 6 :

On considère l'équation différentielle : $f''(x)-2f'(x)+f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x-1$

Déterminer les constantes réelles a, b et c pour que la fonction définie par ax^2+bx+c *soit solution de cette équation différentielle.*

On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction g par : $g(x)=ax^2+bx+c$

Ainsi : $g'(x)=2ax+b$

$g''(x)=2a$

La relation

$$g''(x)-2g'(x)+g(x)=\frac{x^2}{2}-x-1$$

équivaut à :

$$2a-2\times(2ax+b)+ax^2+bx+c=\frac{x^2}{2}-x-1$$
$$\Leftrightarrow\quad 2a-4ax-2b+ax^2+bx+c=\frac{x^2}{2}-x-1$$
$$\Leftrightarrow\quad ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c=\frac{1}{2}x^2-x-1$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b-4a=-1 \\ 2a-2b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-1+4a=-1+4\times\dfrac{1}{2}=1 \\ 2a-2b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=1 \\ c=-1-2a+2b=-1-2\times\dfrac{1}{2}+2\times1=0 \end{cases}$$

Soit :

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2+x$$

Vérification :

$$g'(x)=\frac{1}{2}\times 2x+1=x+1$$
$$g''(x)=1$$
$$g''(x)-2g'(x)+g(x)=1-2(x+1)+\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$$
$$=1-2x-2+\frac{1}{2}x^2+x$$
$$=\frac{1}{2}x^2-x-1$$