EXERCICE 2D.1

1. On considère un triangle ABC rectangle en A. Ecrire la relation de Pythagore pour ce triangle.

2. **a.** On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Démontrer que dans ce cas $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$.

(Remarque : puisque le triangle est rectangle en A, on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**).

b. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

c. Montrer que l'égalité de Pythagore revient à dire que $xx' + yy' = 0$

On retiendra la propriété suivante :

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0}$$

EXERCICE 2D.2

Dans chaque cas, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ **c.** $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d. $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ **e.** $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ **f.** $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$

g. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$ **h.** $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ **i.** $\vec{u}\begin{pmatrix} 35 \\ 14 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2D.3

On considère les points A(1 ; 5), B(3 ; 8) et C(9 ; 4).
Montrer que le triangle ABC est rectangle en utilisant le critère d'orthogonalité.

EXERCICE 2D.4

On considère les points A(–1 ; 3), B(1 ; 6) et C(4 ; 4).
Quelle est la nature du triangle ABC en utilisant le critère d'orthogonalité.

EXERCICE 2D.5

On considère les points A(–3 ; 5), B(–4 ; 7), C(–6 ; 6) et D(–5 ; 4).
Démontrer que ABCD est un carré en utilisant le critère d'orthogonalité.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – *Montpellier*

EXERCICE 2D.1

1. On considère un triangle ABC rectangle en A.

D'après la relation de Pythagore pour ce triangle : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

2. a. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$$

(Remarque : puisque le triangle est rectangle en A, on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**).

b. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: ainsi : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$

c. $AB^2 = x^2 + y^2$, $AC^2 = x'^2 + y'^2$ et $BC^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 = x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2$

L'égalité de Pythagore devient : $x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$

soit : $-2xx' - 2yy' = 0$

d'où : $xx' + yy' = 0$

On retiendra la propriété suivante : $\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \textbf{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0}$

EXERCICE 2D.2

Dans chaque cas, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
$\rightarrow 4\times3+(-2)\times6=0$: **OUI**

b. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\rightarrow 1\times(-4)+(-4)\times(-1)=0$: **OUI**

c. $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\rightarrow 6\times1+(-3)\times2=0$: **OUI**

d. $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\rightarrow 5\times3+(-2)\times7=1$: **NON**

e. $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\rightarrow -6\times5+15\times(-2)=-30$: **NON**

f. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\rightarrow 0\times11+(-7)\times0=0$: **OUI**

g. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$
$\rightarrow 4\times(-5)+(-2)\times(-10)=0$: **OUI**

h. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\rightarrow 3\times(-6)+(-9)\times(-2)=0$: **OUI**

i. $\vec{u}\begin{pmatrix} 35 \\ 14 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
$\rightarrow 35\times(-2)+14\times5=0$: **OUI**

EXERCICE 2D.3

On considère les points A(1 ; 5), B(3 ; 8) et C(9 ; 4).

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} 3-1 \\ 8-5 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right. \text{ et } \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} 9-3 \\ 4-8 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} 6 \\ -4 \end{matrix}\right.$$

$2\times6+3\times(-4)=0$: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, le triangle ABC est rectangle en B.

EXERCICE 2D.4

On considère les points A(–1 ; 3), B(1 ; 6) et C(4 ; 4).

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} 1-(-1) \\ 6-3 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right. \text{ et } \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} x_C - x_A \\ y_C - y_B \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} 4-1 \\ 4-6 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}\right.$$

$2\times3+3\times(-2)=0$: : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, le triangle ABC est rectangle en B.

EXERCICE 2D.5 On considère les points A(–3 ; 5), B(–4 ; 7), C(–6 ; 6) et D(–5 ; 4).

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} -4-(-3) \\ 7-5 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} -6-(-4) \\ 6-7 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}\right.$

$\overrightarrow{CD}\left|\begin{matrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\left|\begin{matrix} -5-(-6) \\ 4-6 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\left|\begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix} -5-(-3) \\ 4-5 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\left|\begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}\right.$

$-1\times(-2)+2\times(-1)=0$: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux

$(-2)\times1+(-1)\times(-2)=0$: $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux

$1\times(-2)+(-2)\times(-1)=0$: $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux

→Un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle.

$\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix} -6-(-3) \\ 6-5 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{BD}\left|\begin{matrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\left|\begin{matrix} -5-(-4) \\ 4-7 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}\left|\begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix}\right.$

$(-3)\times(-1)+1\times(-3)=0$: $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux

→Un rectangle ayant des diagonales perpendiculaires est un carré donc ABCD est un carré.