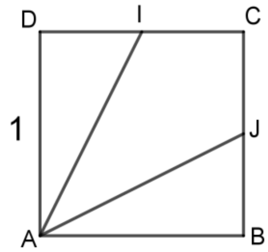
Questions simples et indépendantes visant à tester vos connaissances sur le produit scalaire.
(source : M. Laroche)

Exercice 2F.1 :
Soit $[AB]$ un segment de longueur 4. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 16$.

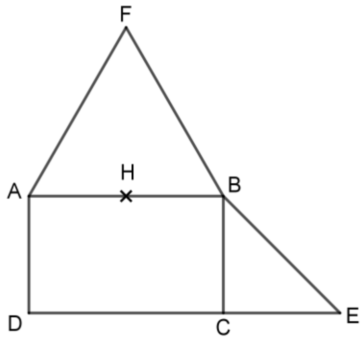
Exercice 2F.2 :
ABCD est un parallélogramme tels que AB = 4, AD = 3 et AC = 6. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2F.3 :
Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 1, I et J sont les milieux respectifs de $[DC]$ et $[CB]$. On note α la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$.
Donner la valeur exacte de $\cos\alpha$ puis donner une valeur approchée de α à 1 degré près.



Exercice 2F.4 :
La figure ci-contre représente un rectangle ABCD tel que AB = 5 et BC = 3 ; un triangle ABF équilatéral et un triangle BCE rectangle et isocèle en C.
Le point H est le milieu du segment $[AB]$.
Calculer les produits scalaires suivants :

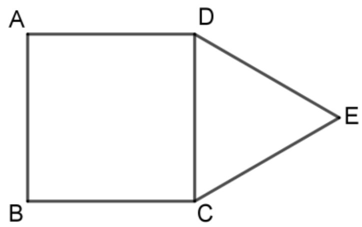
1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ 2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE}$ 3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$
4) $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CE}$ 5) $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}$ 6) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CE}$



Exercice 2F.5 :
Sachant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 7$ et $\vec{u}.\vec{v} = 13$, calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{u}.(\vec{u} + 3\vec{v})$
2. $(\vec{u} - 2\vec{v})^2$

Exercice 2F.6 :
ABCD est un carré de côté *a* et CDE est un triangle équilatéral. On s'intéresse au triangle BDE.
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.



1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE}$ en fonction de *a*.
   On pourra utiliser une projection orthogonale.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE}$ en fonction de *a*.
   c. En déduire l'égalité $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE} = \dfrac{a^2}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)$.
   d. Utiliser ce résultat pour calculer BE^2. On pourra décomposer $\overrightarrow{BE}$ en $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$ puis en déduire BE.
2. a. Calculer, en fonction de *a*, l'aire exacte du triangle ECD.
   b. En déduire que l'aire exacte du triangle EDB est égale à $\dfrac{a^2}{4}\left(2 + \sqrt{3}\right)$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 2F.1 :

Soit $[AB]$ *un segment de longueur 4. Déterminer l'ensemble des points du plan tels que* $MA^2+MB^2=16$.

La méthode la plus rapide est :

$$MA^2+MB^2=AB^2 \text{ pour tout point M,}$$

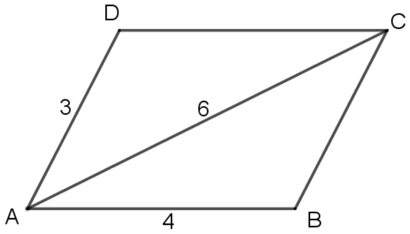
donc la réciproque du théorème de Pythagore est toujours vraie et le triangle ABM est rectangle est M.

D'après le théorème du cercle circonscrit, un triangle rectangle d'hypoténuse $[AB]$ est inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$.

L'ensemble des points du plan tels que $MA^2+MB^2=16$ est le cercle de centre le milieu du segment $[AB]$ et de rayon $r=2$.

Exercice 2F.2 :

ABCD est un parallélogramme tels que AB = 4, AD = 3 et AC = 6. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



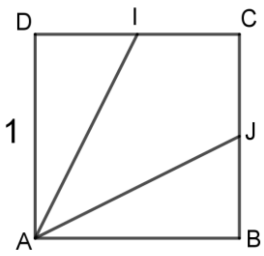
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-CB^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(4^2+6^2-3^2\right)=\frac{1}{2}(16+36-9)=\frac{43}{2}$$

Exercice 2F.3 :

Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 1, I et J sont les milieux respectifs de $[DC]$ *et* $[CB]$. *On note* α *la mesure de l'angle* $\widehat{IAJ}$.

Donner la valeur exacte de $\cos\alpha$ *puis donner une valeur approchée de* α *à 1 degré près.*



$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=AI\times AJ\times\cos\widehat{IAJ}$$

On définit un repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$: on peut définir les coordonnées des différents points :

$$A(0;0)\ ,\ B(1;0),\ D(0;1)\ ,\ C(1;1)\ ,\ I\left(\frac{1}{2};1\right) \text{ et } J\left(1;\frac{1}{2}\right).$$

On obtient les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AI}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AJ}\begin{vmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{vmatrix} \text{ avec } \left\|\overrightarrow{AI}\right\|=AI=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}} \text{ et } \left\|\overrightarrow{AJ}\right\|=AJ=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

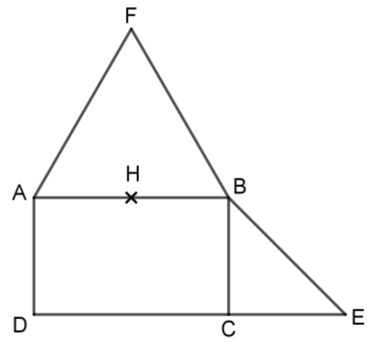
Ainsi : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\times1+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

et : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=AI\times AJ\times\cos\widehat{IAJ}=\sqrt{\frac{5}{4}}\times\sqrt{\frac{5}{4}}\times\cos\widehat{IAJ}=\frac{5}{4}\cos\widehat{IAJ}$

Par égalité des deux expressions du produit scalaire :

$$\frac{5}{4}\cos\widehat{IAJ}=1 \iff \cos\widehat{IAJ}=\frac{4}{5} \iff \widehat{IAJ}=\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\simeq 36{,}87°$$

Exercice 2F.4 :



La figure ci-contre représente un rectangle ABCD tel que AB = 5 et BC = 3 ; un triangle ABF équilatéral et un triangle BCE rectangle et isocèle en C.
Le point H est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.
Calculer les produits scalaires suivants :

(on aurait aussi pu poser un repère orthonormé $\left(\mathrm{D};\frac{1}{\mathrm{DC}}\times\overrightarrow{\mathrm{DC}};\frac{1}{\mathrm{DA}}\times\overrightarrow{\mathrm{DA}}\right)$

1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AH}=5\times\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$

2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}.\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\mathrm{BC}\times\mathrm{BE}\times\cos\widehat{\mathrm{CBE}}$

or le triangle BCE est rectangle et isocèle en C : $\widehat{\mathrm{CBE}}=45°$

et d'après le théorème de Pythagore : $\mathrm{BE}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CE}^2=3^2+3^2=18$ soit $\mathrm{BE}=\sqrt{18}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}.\overrightarrow{\mathrm{BE}}=3\times\sqrt{18}\times\cos 45=3\times\sqrt{9}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\times3\times\frac{2}{2}=9$

AUTRE METHODE : On projette le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ sur la droite (BC) :

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}.\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\mathrm{BC}\times\mathrm{BC}=3\times3=9$

3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ →dans un triangle équilatéral, les droites remarquables sont confondues ainsi H est le projeté orthogonal de F sur le segment $[\mathrm{AB}]$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AH}=5\times\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$

4) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}.\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ →le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ sur la droite (CE) :

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}.\overrightarrow{\mathrm{CE}}=-\mathrm{CD}\times\mathrm{CE}=-5\times3=-15$

5) $\overrightarrow{\mathrm{BE}}.\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ →le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ sur la droite (CD) :

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}.\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}}=-\mathrm{CE}\times\mathrm{CD}=-3\times5=-15$

6) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}.\overrightarrow{\mathrm{CE}}=0$, les vecteurs étant orthogonaux.

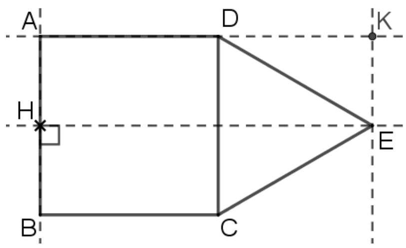
Exercice 2F.5 :

Sachant que les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont tels que* $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=7$ *et* $\vec{u}.\vec{v}=13$, *calculer les produits scalaires suivants :*

1. $\vec{u}.(\vec{u}+3\vec{v})=\vec{u}.\vec{u}+3\times\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|^2+3\times\vec{u}.\vec{v}=3^2+3\times13=9+39=48$

2. $(\vec{u}-2\vec{v})^2=(\vec{u})^2-2\times\vec{u}.2\vec{v}+(2\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2-4\times\vec{u}.\vec{v}+4\times\|\vec{v}\|^2=3^2-4\times13+4\times7^2$
$=9-52+4\times49=-43+196=153$

Exercice 2F.6 :



ABCD est un carré de côté a et CDE est un triangle équilatéral.
On s'intéresse au triangle BDE.
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. **a.** *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ *en fonction de a.*
On pourra utiliser une projection orthogonale.
Soit H le projeté orthogonal du point E sur la droite (AB).

Dans un triangle équilatéral, les droites remarquables sont confondues donc H est le milieu de $[\mathrm{AB}]$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ sur la droite (AB).

Ainsi : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AH}=a\times\frac{a}{2}=\frac{a^2}{2}$.

b. *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE}$ en fonction de a.*

Soit K le projeté orthogonal du point E sur la droite (AD).

Le triangle CDE est équilatéral donc $\widehat{CDE} = 60°$, on obtient : $\widehat{EDK} = 30°$.

Dans le triangle rectangle KDE, sachant que $KE = \frac{a}{2}$, on obtient :

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DE} = -AD \times DE \times \cos\widehat{EDK} = -a \times a \times \cos 30 = -a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

c. *En déduire l'égalité $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE} = \frac{a^2}{2}(1-\sqrt{3})$.*

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = -a^2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}(1-\sqrt{3})$$

d. *Utiliser ce résultat pour calculer BE^2. On pourra décomposer $\overrightarrow{BE}$ en $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}$ puis en déduire BE.*

$$BE^2 = \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}).(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}) = BD^2 + 2\times\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DE} + DE^2$$

D'après le théorème de Pythagore : $BD^2 = BA^2 + AD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Ainsi :

$$BE^2 = 2a^2 - 2\times\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE} + a^2 = 2a^2 - 2\times\frac{a^2}{2}(1-\sqrt{3}) + a^2 = 2a^2 - a^2 + \sqrt{3}a^2 + a^2$$

$$BE^2 = (2+\sqrt{3})a^2$$

2.

a. *Calculer, en fonction de a, l'aire exacte du triangle ECD.*

D'après le théorème de Pythagore, la hauteur du triangle équilatéral ECD mesure :

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\times\sqrt{3}}{2}$$

Donc l'aire du triangle ECD vaut :

$$\frac{a\times\frac{a\times\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\times\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{a^2\times\sqrt{3}}{4}$$

b. En déduire que l'aire exacte du triangle EDB est égale à $\frac{a^2}{4}(2+\sqrt{3})$

$$A_{BDE} = A_{BCD} + A_{CDE} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\times\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{4}(2+\sqrt{3})$$