Problèmes sur les relations métriques

(source : M. Laroche)

Exercice 5B.1 :

ABC est un triangle tel que AB = 7, BC = 5 et CA = 8. On note H le pied de la hauteur issue de B et G le centre de gravité du triangle.

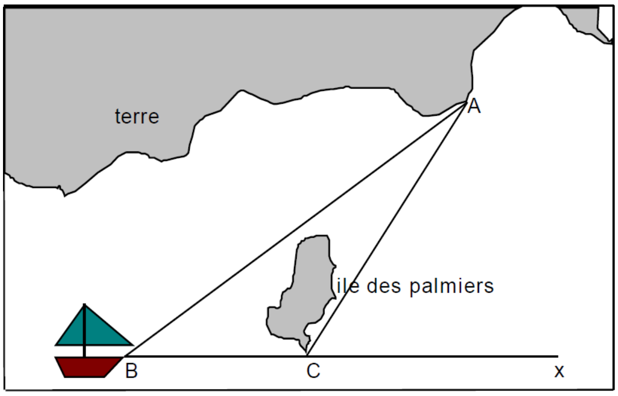
1. Calculer les angles de ce triangle.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire la longueur AH.
3. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, en déduire la longueur AG.

Exercice 5B.2 :

Un bateau avance à 24 km/h. Pour aller de B en A, il devra passer par C car la profondeur est insuffisante entre la terre et l'île. A 8 heures il passe en B et le capitaine trouve $\widehat{ABC} = 32°$.

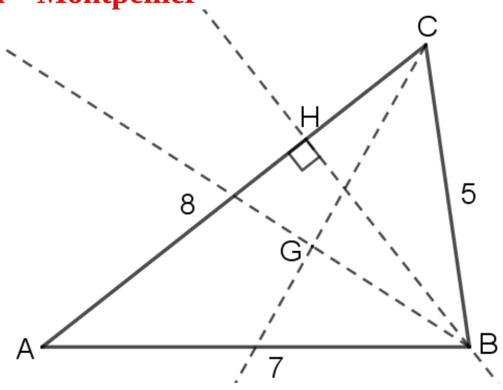
A 8 heures 20 mn le bateau arrive en C. Juste avant de virer vers A le capitaine mesure $\widehat{ACx}$ et trouve 57°.

A quelle heure le bateau arrivera-t-il en A ?



Exercice 5B.1 :

ABC est un triangle tel que AB = 7, BC = 5 et CA = 8.
On note H le pied de la hauteur issue de B et G le centre de gravité du triangle.



1. *Calculer les angles de ce triangle.*
D'après les formules d'Al Kashi :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\times AC\times BC\times\cos\widehat{BCA}$$
$$\Leftrightarrow\ 7^2 = 8^2 + 5^2 - 2\times8\times5\times\cos\widehat{BCA}$$
$$\Leftrightarrow\ 49 = 64 + 25 - 80\times\cos\widehat{BCA}$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{49-89}{-80} = \cos\widehat{BCA}$$
$$\Leftrightarrow\ \cos\widehat{BCA} = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \widehat{BCA} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°.$$

De même, on obtient : $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{64+49-25}{2\times8\times7}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{11}{14}\right) \simeq 38,2°$.

$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{49+25-64}{2\times7\times5}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) \simeq 81,8°.$$

2. *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire la longueur AH.*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC} = 7\times8\times\frac{11}{14} = 44.$$

Or $\quad\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH\times AC = 8\times AH$

On en déduit :

$$8\times AH = 44\ \Leftrightarrow\ AH = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

3. *Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, en déduire la longueur AG.*
Le centre de gravité se trouve aux deux-tiers des médianes en partant du sommet.
Soit I le milieu du côté $[BC]$, ainsi :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

or $\quad\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\times\overrightarrow{AI}$

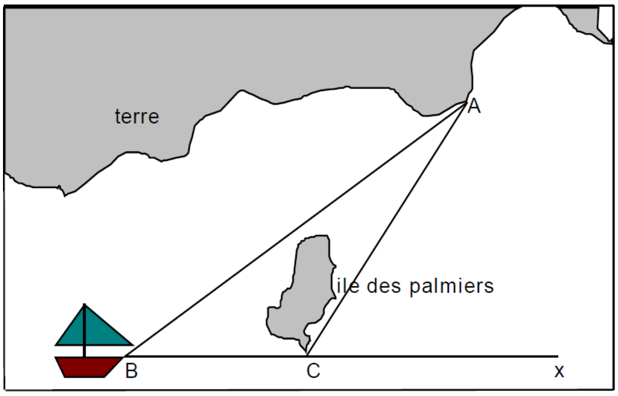
donc : $\quad\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$

On peut ainsi calculer :

$$AG^2 = \overrightarrow{AG}^2 = \left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right)^2 = \frac{1}{9}\left(AB^2 + 2\times\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2\right) = \frac{1}{9}\left(7^2 + 2\times44 + 8^2\right)$$
$$= \frac{1}{9}(49+88+64) = \frac{201}{9} = \frac{67}{3}$$
$$AG = \sqrt{\frac{201}{9}} = \frac{\sqrt{201}}{3}$$

Exercice 5B.2 :

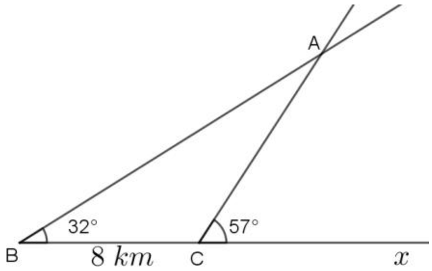
Un bateau avance à 24 km/h. Pour aller de B en A, il devra passer par C car la profondeur est insuffisante entre la terre et l'île. A 8 heures il passe en B et le capitaine trouve $\widehat{ABC} = 32°$.
A 8 heures 20 mn le bateau arrive en C. Juste avant de virer vers A le capitaine mesure $\widehat{ACx}$ et trouve 57°.
A quelle heure le bateau arrivera-t-il en A ?



Le bateau avance à 24 km/h et met 20 minutes soit $\frac{1}{3}$ d'heure pour aller de B vers C.

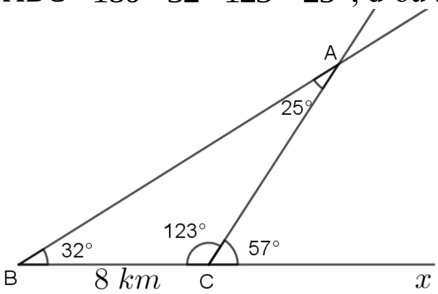
$$v = \frac{d}{t} \iff v \times t = d \iff \mathrm{BC} = 24 \times \frac{1}{3} = 8\,\mathrm{km}.$$

Le problème se résume ainsi :



Il est nécessaire de calculer la distance AC afin de déterminer l'heure d'arrivée.
On obtient aisément :

$$\widehat{\mathrm{BCA}} = 180 - 57 = 123° \text{ et } \widehat{\mathrm{ABC}} = 180 - 32 - 123 = 25°\text{, d'où :}$$



D'après la loi des sinus :

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin \widehat{\mathrm{ABC}}} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin \widehat{\mathrm{BAC}}} \iff \frac{\mathrm{AC}}{\sin 32} = \frac{8}{\sin 25} \iff \mathrm{AC} = \frac{8 \times \sin 32}{\sin 25} \simeq 10{,}031 \text{ km.}$$

Or $\quad v = \frac{d}{t} \iff v \times t = d \iff t = \frac{d}{v} = \frac{10{,}031}{24} \simeq 0{,}41796 \text{ h} \simeq 0{,}41796 \times 60 \simeq 25{,}08\,\mathrm{min}$.

Le bateau devrait arriver vers 8 heures 45 minutes.