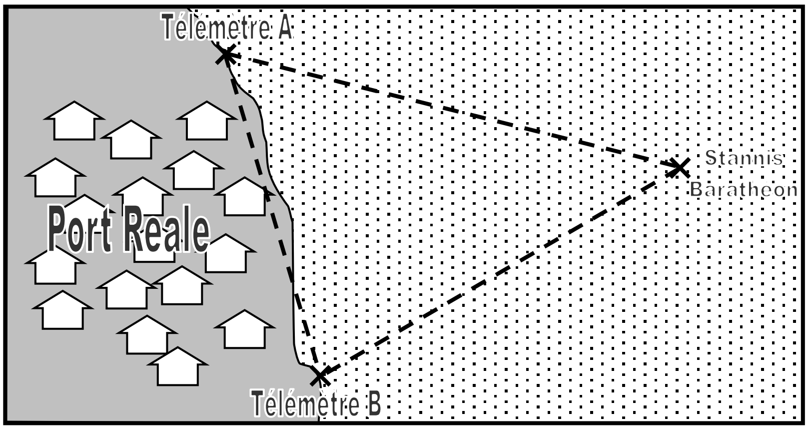
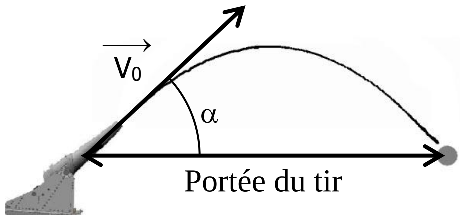
Dans la lutte pour le royaume des Sept Couronnes, Stannis Barathéon a décidé de mener un assaut naval contre la cité de Port-Reale.
La défense de la cité est organisée par la Main du Roi, son oncle Tyrion Lannister. Il a décidé de faire tirer le puissant canon sur le navire amiral de la flotte, qu'il faudra auparavant localiser avec précision.

1. Triangulation
Les deux télémètres A et B sont distants d'exactement 3200 mètres.
Les télémètres permettent de mesurer l'angle entre l'axe (AB) et la direction du navire amiral.
On donne $\widehat{A} = 65{,}2°$ et $\widehat{B} = 79{,}6°$

Calculer la distance qui sépare le navire amiral (point S) de chaque télémètre.



2. Feu à volonté
Le télémètre B est couplé à un canon capable de tirer des boulets avec une vitesse initiale V_0 (« *vitesse de bouche* ») de 250 mètres par seconde.
La trajectoire du boulet sera une parabole, plus ou moins haute selon l'angle α mesurant l'inclinaison du canon par rapport à l'horizontale, variant entre 1 et 45 degrés. C'est en effet pour cet angle de $\alpha = 45°$ que la portée du tir sera maximale.

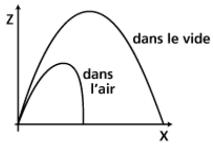


La portée du tir est donnée par la formule : $X = \dfrac{2(V_0)^2}{g}\cos\alpha.\sin\alpha$ avec $g = 9{,}81$ m/s²
Calculer la portée du tir pour $\alpha = 10°$, $\alpha = 20°$, $\alpha = 30°$ et $\alpha = 40°$.

3. Ajustement du tir
On admettra que le navire visé est situé à exactement 5039 mètres du canon.
a. D'après les calculs précédents, donner un encadrement (d'amplitude 10 degrés) de l'angle α qui permettrait au tir d'atteindre la cible.
b. On va essayer de déterminer à l'aide d'un algorithme l'angle α. Il s'agira de faire d'incrémenter l'angle α degré par degré, en prenant pour valeur initiale le début de l'intervalle précédent, et de calculer dans chaque cas la portée du tir, jusqu'à ce que celle-ci atteigne (ou dépasse) la distance souhaitée. Et d'afficher alors la valeur de α à l'écran.
Ecrire cet algorithme (on prendra pour variable A pour α et X pour la portée).
c. Déterminer à l'aide de cet algorithme les deux valeurs entières de α qui permettraient les tirs les plus précis.

4. Tir de précision
Déterminer l'angle encore plus précisément (au centième de degré), c'est-à-dire trouver la solution de l'équation : $\dfrac{2(V_0)^2}{g}\cos\alpha.\sin\alpha = 5039$
Remarque : on pourra simplifier l'équation en utilisant la formule de duplication $\sin 2x = 2\cos x.\sin x$

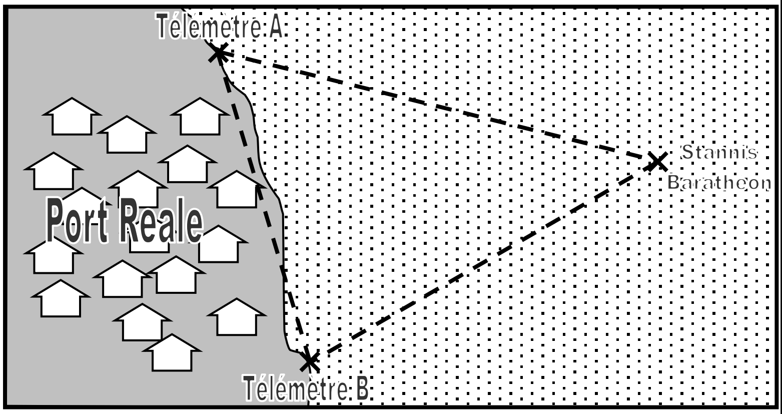
5. Attention
Pour simplifier, on a négligé dans tout le problème les forces de frottements sur le boulet, qui sont en réalité loin d'être négligeables compte tenu de la vitesse et la longueur du tir.
Pour garder des valeurs cohérentes, on a choisi une vitesse de bouche de 250 m/s alors qu'en réalité elle serait plus proche de 450 m/s mais tir serait vite freiné par les frottements.



CORRIGE – Notre Dame de La Merci - Montpellier

Dans la lutte pour le royaume des Sept Couronnes, Stannis Barathéon a décidé de mener un assaut naval contre la cité de Port-Reale.
La défense de la cité est organisée par la Main du Roi, son oncle Tyrion Lannister. Il a décidé de faire tirer le puissant canon sur le navire amiral de la flotte, qu'il faudra auparavant localiser avec précision.

1. Triangulation



Les deux télémètres A et B sont distants d'exactement 3200 mètres.
Les télémètres permettent de mesurer l'angle entre l'axe (AB) et la direction du navire amiral.
On donne $\hat{A}$ *= 65,2° et* $\hat{B}$ *= 79,6°*
Calculer la distance qui sépare le navire amiral (point S) de chaque télémètre.

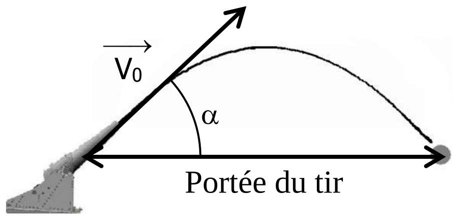
La somme des angles d'un triangle vaut 180° donc :
$\hat{S} = 180 - 65,2 - 79,6 = 180 - 144,8 = 35,2°$.

D'après la loi des sinus :

$$\frac{\sin \hat{B}}{AS} = \frac{\sin \hat{S}}{AB} \Leftrightarrow \frac{\sin 79,6}{AS} = \frac{\sin 35,2}{3200} \Leftrightarrow AS = \frac{3200 \times \sin 79,6}{\sin 35,2} \simeq 5460,2\text{ m.}$$

$$\frac{\sin \hat{A}}{BS} = \frac{\sin \hat{S}}{AB} \Leftrightarrow \frac{\sin 65,2}{BS} = \frac{\sin 35,2}{3200} \Leftrightarrow BS = \frac{3200 \times \sin 65,2}{\sin 35,2} \simeq 5039,4\text{ m.}$$

2. Feu à volonté



Le télémètre B est couplé à un canon capable de tirer des boulets avec une vitesse initiale V_0 *(« vitesse de bouche ») de 250 mètres par seconde.*
La trajectoire du boulet sera une parabole, plus ou moins haute selon l'angle α mesurant l'inclinaison du canon par rapport à l'horizontale, variant entre 1 et 45 degrés. C'est en effet pour cet angle de α = 45° que la portée du tir sera maximale.

La portée du tir est donnée par la ***fonction*** *:* $X(\alpha) = \frac{2(V_0)^2}{g}\cos\alpha.\sin\alpha$ *avec g = 9,81 m/s²*

Calculer la portée du tir pour α = 10°, α = 20°, α = 30° et α = 40°.

La fonction se simplifie : $X(\alpha) = \frac{2 \times 250^2}{9,81}\cos\alpha.\sin\alpha = \frac{125\,000}{9,81}\cos\alpha.\sin\alpha$

$$X(10) = \frac{125\,000}{9,81}\cos 10 \times \sin 10 \simeq 2179 \text{ , } X(20) \simeq 4095,2 \text{ , } X(30) \simeq 5517,5 \text{ et } X(40) \simeq 6274,3.$$

3. Ajustement du tir

On admettra que le navire visé est situé à exactement 5039 mètres du canon.

a. *D'après les calculs précédents, donner un encadrement (d'amplitude 10 degrés) de l'angle α qui permettrait au tir d'atteindre la cible.*
Au regard des mesures précédentes, il faudrait ajuster l'angle entre 20° et 30°.

b. *On va essayer de déterminer à l'aide d'un algorithme l'angle α. Il s'agira de faire d'incrémenter l'angle α degré par degré, en prenant pour valeur initiale le début de l'intervalle précédent, et de calculer dans chaque cas la portée du tir, jusqu'à ce que celle-ci atteigne (ou dépasse) la distance souhaitée. Et d'afficher alors la valeur de α à l'écran.*
Ecrire cet algorithme (on prendra pour variable A pour α et X pour la portée).

$X \leftarrow 4095,2$
$a \leftarrow 20$
Tant que $X < 5039$
  $a \leftarrow a + 1$
  $X \leftarrow 125000 \times \cos X \times \sin X / 9,91$
Afficher a

c. *Déterminer à l'aide de cet algorithme les deux valeurs entières de α qui permettraient les tirs les plus précis.*
L'angle doit être compris entre 26° et 27°.

4. Tir de précision

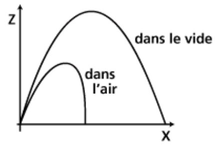
Déterminer l'angle encore plus précisément (au centième de degré), c'est-à-dire trouver la solution de l'équation : $\dfrac{2(V_0)^2}{g}\cos\alpha.\sin\alpha = 5039$

$$\frac{2(V_0)^2}{g}\cos\alpha.\sin\alpha = 5039 \Leftrightarrow \frac{125\ 000}{9,81}\cos\alpha.\sin\alpha = 5039 \Leftrightarrow \frac{125\ 000}{9,81}\times\frac{1}{2}\sin(2\alpha) = 5039$$

$$\Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \frac{5039\times 2\times 9,81}{125\ 000} \Leftrightarrow 2\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5039\times 2\times 9,81}{125\ 000}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha \simeq 52,27 \Leftrightarrow \alpha \simeq 26,14°$$

5. Attention



Pour simplifier, on a négligé dans tout le problème les forces de frottements sur le boulet, qui sont en réalité loin d'être négligeables compte tenu de la vitesse et la longueur du tir.
Pour garder des valeurs cohérentes, on a choisi une vitesse de bouche de 250 m/s alors qu'en réalité elle serait plus proche de 450 m/s mais tir serait vite freiné par les frottements.