Indépendance d'évènements et successions de deux épreuves indépendantes

Exercice 2B.1

Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'événement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les événements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0, 02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0, 069.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

Exercice 2B.2

Un dé cubique truqué est tel que la probabilité de sortie d'un numéro k est proportionnelle à k. On lance ce dé et on considère les événements :

- A « le numéro est pair » ;
- B « le numéro est supérieur ou égal à 3 » ;
- C « le numéro obtenu est 3 ou 4 »

a) Calculez les probabilités de A, B, C.
b) Calculez la probabilité conditionnelle $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.
c) A et B sont-ils indépendants ? A et C ?

Exercice 2B.1

Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'événement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les événements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0, 02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0, 069.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

D'après l'énoncé :

$$p(\mathrm{A})=0,02 \quad \text{et} \quad p(\mathrm{A}\cup\mathrm{F})=0,069$$

Les événements A et F sont indépendants donc

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{F})$$

D'après la loi des probabilités :

$$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{F})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{F})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{F})-p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{F})$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,069=0,02+p(\mathrm{F})-0,02\times p(\mathrm{F})$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,069-0,02=p(\mathrm{F})(1-0,02)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,049=0,98\times p(\mathrm{F})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0,049}{0,98}=p(\mathrm{F})$$

$$\Leftrightarrow \quad p(\mathrm{F})=0,05$$

Exercice 2B.2

Un dé cubique truqué est tel que la probabilité de sortie d'un numéro k est proportionnelle à k. On lance ce dé et on considère les événements :

- *A « le numéro est pair » ;*
- *B « le numéro est supérieur ou égal à 3 » ;*
- *C « le numéro obtenu est 3 ou 4 »*

a) *Calculez les probabilités de A, B, C.*

D'après l'énoncé :

$$p(1)=k\times 1\ ,\ p(2)=k\times 2\ ,\ p(3)=k\times 3\ ,\ p(4)=k\times 4\ ,\ p(5)=k\times 5\ ,\ p(6)=k\times 6\,.$$

Or la somme de toutes les probabilités est égale à 1 :

$$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad k+2k+3k+4k+5k+6k=1$$

$$\Leftrightarrow \quad 21k=1$$

$$\Leftrightarrow \quad k=\frac{1}{21}$$

Ainsi : $p(\mathrm{A})=p(2)+p(4)+p(6)=2k+4k+6k=12k=12\times\frac{1}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

$$p(\mathrm{B})=p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=3k+4k+5k+6k=18k=18\times\frac{1}{21}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$$

$$p(\mathrm{C})=p(3)+p(4)=3k+4k=7k=7\times\frac{1}{21}=\frac{7}{21}$$

b) *Calculez la probabilité conditionnelle* $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$$

Or $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ est l'ensemble des numéros pairs supérieurs ou égaux à 3 :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(4) + p(6) = 4k + 6k = 10k = 10\times\frac{1}{21} = \frac{10}{21}$$

Ainsi : $$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}\frac{\frac{10}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{10}{21}\times\frac{7}{4} = \frac{5}{6}$$

c) *A et B sont-ils indépendants ? A et C ?*

$p(\mathrm{B}) = \frac{6}{7}$ et $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{5}{6}$

→ $p(\mathrm{B}) \neq p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.

$\mathrm{A}\cap\mathrm{C}$ est l'ensemble des numéros pairs compris entre 3 et 4, soit la valeur 4 :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C}) = p(4) = 4k = 4k = 10\times\frac{1}{21} = \frac{4}{21}$$

$$p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{C}) = \frac{4}{7}\times\frac{7}{21} = \frac{4}{21}$$

→ $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{C}) = p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{C})$: les évènements A et C sont indépendants.