

Exercices sur les successions de deux épreuves indépendantes.

Exercice 3A.1

On lance 2 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus. On appelle A l'issue « on a obtenu un 6 » et $B = \overline{A}$ « on n'a pas obtenu un 6 ». Quelle est la probabilité d'obtenir deux 6 ?

Exercice 3A.2

On lance 2 flèches sur une cible comportant trois secteurs numérotés 10 ; 5 ; 1 et on s'intéresse au nombre de points obtenus sachant que la flèche atteint toujours sa cible et :

- la probabilité que la flèche atteigne le 10 est 0,1 ,
- la probabilité que la flèche atteigne le 5 est 0,4 ,
- la probabilité que la flèche atteigne le 1 est 0,5.

On appelle D l'événement la flèche atteint le 10, C l'événement la flèche atteint le 5 et U l'événement la flèche atteint le 1.

- 1) Quelle est la probabilité d'obtenir un score supérieur ou égal à 12 ?
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir un score pair ?

Exercice 3A.3

On s'intéresse aux familles ayant 2 enfants. On appelle F l'événement « naissance d'une fille » et G « naissance d'un garçon ». On sait que en France $p(F) \approx 0,488$ et que $p(G) = 1 - p(F) \approx 0,512$.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux filles ?

Exercice 3A.4

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher : deux bleus, deux rouges et un noir. L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard successivement deux jetons de l'urne avec remise et à noter les deux couleurs obtenues.

On note B l'événement «tirer un jeton bleu» ; R l'événement «tirer un jeton rouge » et N l'événement «tirer un jeton noir».

- a) Construire l'arbre pondéré associé à cette expérience.
- b) Déterminer la probabilité d'obtenir l'issue (R;N), puis celle de l'issue (R;B).
- c) On note U l'événement «obtenir un tirage Unicolore». Déterminer la probabilité de U.

Exercice 3A.5

Un dé à quatre face n'est pas équilibré, les probabilités sont :

0,1 pour la face "1", 0,2 pour la face "2", 0,3 pour la face "3" et 0,4 pour la face "4".

On lance deux fois de suite ce dé et on totalise les valeurs obtenues.

- 1) Quelle est la probabilité d'obtenir un score égal à 8 ?
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir un score inférieur ou égal à 3 ?
- 3) Quelle est la probabilité d'obtenir un score supérieur à 6 ?

Exercice 3A.6

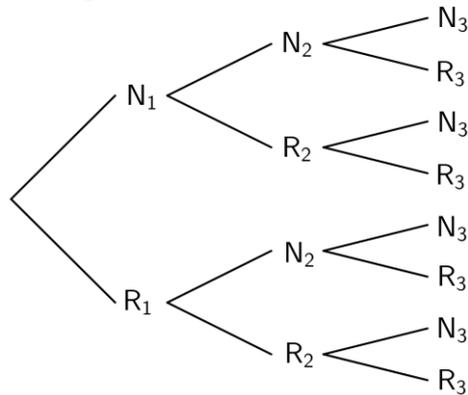
On considère trois urnes U_1 , U_2 , et U_3 .

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2 , à les mettre dans U_3 , puis à tirer au hasard une boule de U_3 .

Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i , (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2) a) Calculer la probabilité des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

b) En déduire la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.

c) Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.

3) Déduire de la question précédente que $p(N_3) = \frac{2}{5}$.

4) Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5) Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 3A.1

On lance 2 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus. On appelle A l'issue « on a obtenu un 6 » et $B = \bar{A}$ « on n'a pas obtenu un 6 ».

Quelle est la probabilité d'obtenir deux 6 ?

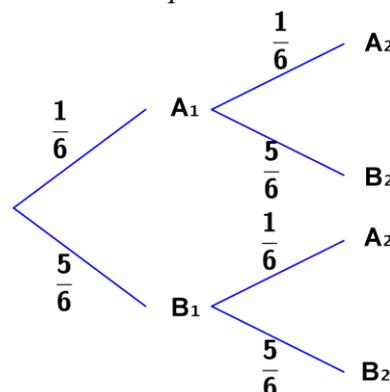
Représentons la situation à l'aide d'un arbre de probabilité,

sachant que $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(B) = \frac{5}{6}$.

La probabilité d'avoir deux 6 est : $p(A_1 \cap A_2)$.

D'après la loi des probabilités conditionnelles :

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$



Exercice 3A.2

On lance 2 flèches sur une cible comportant trois secteurs numérotés 10 ; 5 ; 1 et on s'intéresse au nombre de points obtenus sachant que la flèche atteint toujours sa cible et :

- la probabilité que la flèche atteigne le 10 est 0,1 ,
- la probabilité que la flèche atteigne le 5 est 0,4 ,
- la probabilité que la flèche atteigne le 1 est 0,5.

On appelle D l'événement la flèche atteint le 10, C l'événement la flèche atteint le 5 et U l'événement la flèche atteint le 1.

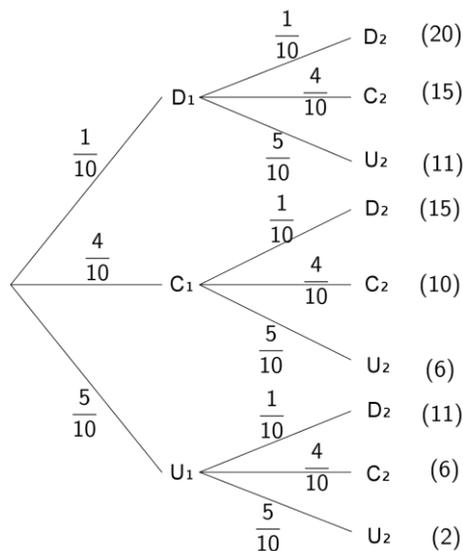
1) Quelle est la probabilité d'obtenir un score supérieur ou égal à 12 ?

La probabilité cherchée est, en utilisant la loi des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} & p(D_1 \cap D_2) + p(D_1 \cap C_2) + p(C_1 \cap D_2) \\ &= p(D_1) \times p_{D_1}(D_2) + p(D_1) \times p_{D_1}(C_2) + p(C_1) \times p_{C_1}(D_2) \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{100} \end{aligned}$$

2) Quelle est la probabilité d'obtenir un score pair ?

$$\begin{aligned} & p(D_1 \cap D_2) + p(C_1 \cap C_2) + p(C_1 \cap U_2) + p(U_1 \cap C_2) + p(U_1 \cap U_2) \\ &= p(D_1) \times p_{D_1}(D_2) + p(C_1) \times p_{C_1}(C_2) + \dots + p(U_1) \times p_{U_1}(U_2) \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \\ &= \frac{1}{100} + \frac{16}{100} + \frac{20}{100} + \frac{20}{100} + \frac{25}{100} = \frac{82}{100} = 0,82 \end{aligned}$$



Exercice 3A.3

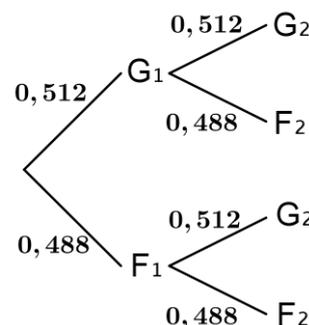
On s'intéresse aux familles ayant 2 enfants. On appelle F l'événement « naissance d'une fille » et G « naissance d'un garçon ».

On sait que en France $p(F) \approx 0,488$ et que $p(G) = 1 - p(F) \approx 0,512$.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux filles ?

D'après la loi des probabilités conditionnelles :

$$p(F_1 \cap F_2) = p(F_1) \times p_{F_1}(F_2) = 0,488 \times 0,488 \approx 0,238$$



Exercice 3A.4

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher : deux bleus, deux rouges et un noir. L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard successivement deux jetons de l'urne avec remise et à noter les deux couleurs obtenues.

On note B l'évènement «tirer un jeton bleu» ; R l'évènement «tirer un jeton rouge» et N l'évènement «tirer un jeton noir».

- a) Construire l'arbre pondéré associé à cette expérience.
- b) Déterminer la probabilité d'obtenir l'issue (R;N), puis celle de l'issue (R;B).

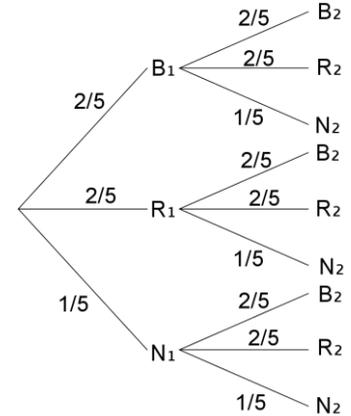
Loi des probabilités conditionnelles :

$$p(R_1 \cap N_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(N_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

$$p(R_1 \cap B_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

- c) On note U l'évènement «obtenir un tirage Unicolore». Déterminer la probabilité de U.

$$\begin{aligned} p(U) &= p(B_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2) + p(N_1 \cap N_2) \\ &= p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(N_2) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$



Exercice 3A.5

Un dé à quatre face n'est pas équilibré, les probabilités sont :

0,1 pour la face "1", 0,2 pour la face "2", 0,3 pour la face "3" et 0,4 pour la face "4".

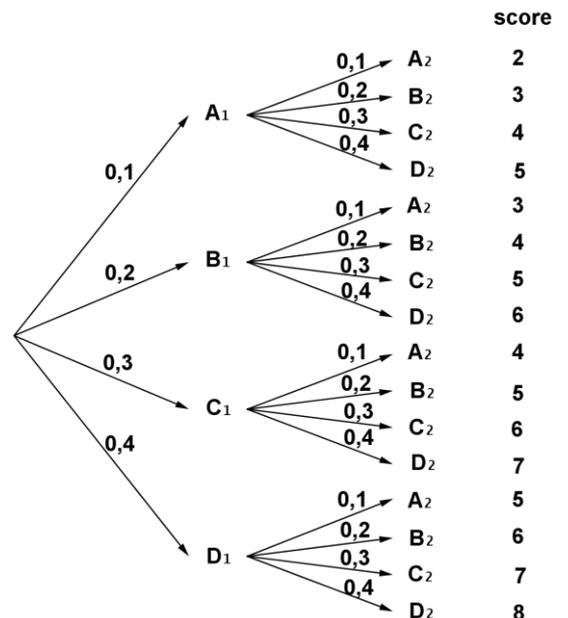
On lance deux fois de suite ce dé et on totalise les valeurs obtenues.

- 1) Quelle est la probabilité d'obtenir un score égal à 8 ?
- 2) Quelle est la probabilité d'obtenir un score inférieur ou égal à 3 ?
- 3) Quelle est la probabilité d'obtenir un score supérieur à 6 ?

Soit A, B, C et D les évènements respectifs « on obtient un 1 », « on obtient un 2 », « on obtient un 3 » et « on obtient un 4 ».

Voici l'arbre représentant cette situation :

- 1) Loi des probabilités conditionnelles :
 $p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \times p_{D_1}(D_2) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$
- 2)
 $p(A_1 \cap A_2) + p(A_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap A_2)$
 $= 0,1 \times 0,1 + 0,1 \times 0,2 + 0,2 \times 0,1$
 $= 0,05$
- 3)
 $p(C_1 \cap D_2) + p(D_1 \cap C_2) + p(D_1 \cap D_2)$
 $= 0,3 \times 0,4 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4$
 $= 0,4$



Exercice 3A.6

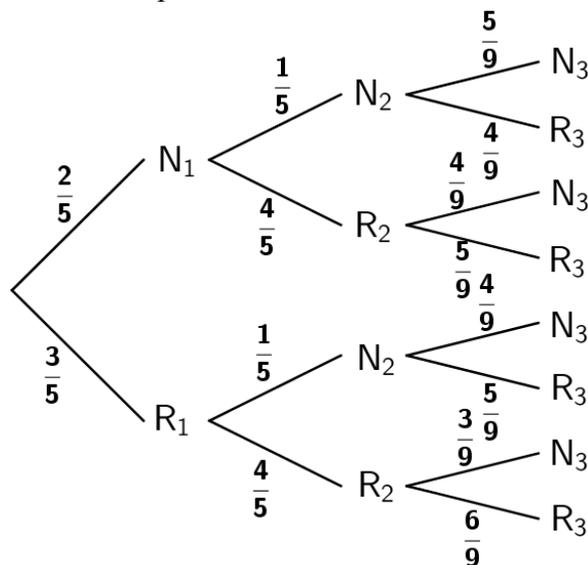
On considère trois urnes U_1 , U_2 , et U_3 .

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2 , à les mettre dans U_3 , puis à tirer au hasard une boule de U_3 .

Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i , (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2) a) Calculer la probabilité des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

$$p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{45}$$

$$p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225}$$

b) En déduire la probabilité de l'événement $N_1 \cap N_3$.

$$p(N_1 \cap N_3) = p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{45} + \frac{32}{225} = \frac{42}{225}$$

c) Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $R_1 \cap N_3$.

$$\begin{aligned} p(R_1 \cap N_3) &= p(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(R_1 \cap R_2 \cap N_3) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{225} + \frac{36}{225} = \frac{48}{225} \end{aligned}$$

3) Déduire de la question précédente que $p(N_3) = \frac{2}{5}$.

N_1 et R_1 forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(N_3) = p(N_1 \cap N_3) + p(R_1 \cap N_3) = \frac{42}{225} + \frac{48}{225} = \frac{90}{225} = \frac{\boxed{45} \times 2}{\boxed{45} \times 5} = \frac{2}{5}$$

4) Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

$$p(N_1 \cap N_3) = \frac{42}{225} \quad \text{et} \quad p(N_1) \times p(N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$p(N_1 \cap N_3) \neq p(N_1) \times p(N_3)$: les événements N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

- 5) Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

$$p_{N_3}(R_1) = \frac{p(R_1 \cap N_3)}{p(N_3)} = \frac{\frac{48}{225}}{\frac{2}{5}} = \frac{48}{225} \times \frac{5}{2} = \frac{24}{45}$$