

ANGLES DE VECTEURS - TRIGONOMETRIE – Notre Dame de La Merci

. Introduction

Ex 4B.1 : Compléter le tableau suivant :

mesure en degrés		50	18		135		45	153	
mesure en radians	$\frac{8\pi}{15}$			$\frac{3\pi}{20}$		$\frac{\pi}{3}$			$\frac{7\pi}{6}$

Ex 4B.2 : Soit un cercle de rayon 4 cm ; déterminer la longueur des arcs de mesure $a = 32^\circ$ et $b = 1,2$ rad (arrondir les résultats au centième)

conseil : utiliser la formule : $l = R \times \alpha$

. Angle orienté de deux vecteurs

Ex 4B.3 : Trouver la mesure principale α_i (pour $i = 1$ ou 2 ou 3 ou 4) de chacun des angles x_i et sur le cercle trigonométrique, placer les points M_i associés aux réels α_i

$$x_1 = \frac{341\pi}{12} ; x_2 = -379\pi ; x_3 = \frac{325\pi}{4} ; x_4 = -\frac{1023\pi}{6}$$

. Sinus et cosinus

Ex 4B.4 : 1) calculer $A = \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3}$

2) simplifier $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

conseil : pour A , il faut écrire $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$ sous la forme $\pi - \frac{\pi}{3}$ ou $\pi + \frac{\pi}{3}$ ou ... , de façon à pouvoir utiliser les formules de trigonométrie

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

. Fonction sinus

Ex 4B.5 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin \frac{x}{2}$

- 1) montrer que f est impaire
- 2) montrer que f est périodique de période 4π ; en déduire un intervalle restreint d'étude pour f
- 3) dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 2\pi]$
- 4) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tracer C la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$
- 5) dans le même repère, compléter C de façon à obtenir sa représentation graphique sur $[-2\pi ; 6\pi]$ (on indiquera les transformations utilisées)

. Fonction cosinus

Ex 4B.6 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos 2x$

- 1) montrer que f est paire
- 2) montrer que f est périodique de période π ; en déduire un intervalle restreint d'étude pour f
- 3) dresser le tableau de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- 4) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tracer C la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- 5) dans le même repère, compléter C de façon à obtenir sa représentation graphique sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (on indiquera les transformations utilisées)

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

. Introduction

Ex 4B.1 : Si α est la mesure en radians et a celle en degrés ; on a : $a = \frac{\alpha \times 180}{\pi}$ et $\alpha = \frac{a \times \pi}{180}$

$$\frac{8\pi}{15} \text{ rad} = \frac{\frac{8\pi}{15} \times 180}{\pi} = \frac{8 \times 180}{15} = 96^\circ$$

$$50^\circ = \frac{50 \times \pi}{180} = \frac{5\pi}{18} \text{ rad}$$

$$\frac{3\pi}{20} \text{ rad} = \frac{\frac{3\pi}{20} \times 180}{\pi} = 27^\circ$$

$$18^\circ = \frac{18 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{10} \text{ rad}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{\frac{\pi}{3} \times 180}{\pi} = 60^\circ$$

$$135^\circ = \frac{135 \times \pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\frac{7\pi}{6} \text{ rad} = \frac{\frac{7\pi}{6} \times 180}{\pi} = 210^\circ$$

$$45^\circ = \frac{45 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$153^\circ = \frac{153 \times \pi}{180} = \frac{17\pi}{20} \text{ rad}$$

mesure en degrés	96	50	18	27	135	60	45	153	210
mesure en radians	$\frac{8\pi}{15}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{17\pi}{20}$	$\frac{7\pi}{6}$

Ex 4B.2 : On a : $l = R \times \alpha$,

où l est la longueur de l'arc, R le rayon du cercle et α la mesure de l'angle en radians

$$a = 32^\circ = \frac{32 \times \pi}{180} = \frac{8\pi}{45} \text{ rad} \text{ donc } l = 4 \times \frac{8\pi}{45} = \frac{32\pi}{45} \text{ cm} \approx 2,23 \text{ cm}$$

$$b = 1,2 \text{ rad} \text{ donc } l = 4 \times 1,2 = 4,8 \text{ cm}$$

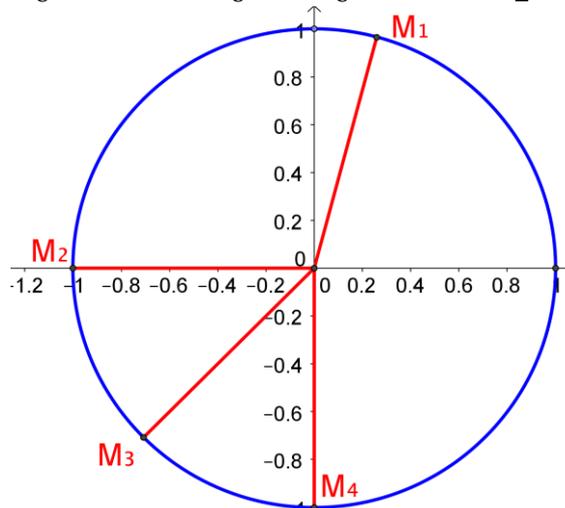
. Angle orienté de deux vecteurs

Ex 4B.3 : $x_1 = \frac{341\pi}{12} = \frac{336\pi + 5\pi}{12} = \frac{28 \times 12\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = 28\pi + \frac{5\pi}{12} = 14 \times 2\pi + \frac{5\pi}{12}$ donc $\alpha_1 = \frac{5\pi}{12}$

$$x_2 = -379\pi = -380\pi + \pi = -190 \times 2\pi + \pi \text{ donc } \alpha_2 = \pi$$

$$x_3 = \frac{325\pi}{4} = \frac{328\pi - 3\pi}{4} = \frac{82 \times 4\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = 82\pi - \frac{3\pi}{4} = 41 \times 2\pi - \frac{3\pi}{4} \text{ donc } \alpha_3 = -\frac{3\pi}{4}$$

$$x_4 = -\frac{1023\pi}{6} = \frac{-1020\pi - 3\pi}{6} = -\frac{170 \times 6\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = -170\pi - \frac{\pi}{2} = -85 \times 2\pi - \frac{\pi}{2} \text{ donc } \alpha_4 = -\frac{\pi}{2}$$



. Sinus et cosinus

Ex 4B.4 : $A = \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3}$

$$A = \cos \frac{\pi}{3} - \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$A = \cos \frac{\pi}{3} - \left(-\cos \frac{\pi}{3} \right) - \left(-\cos \frac{\pi}{3} \right) + \cos \frac{\pi}{3}$$

$$A = \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}$$

$$A = 4 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$B = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos (5\pi - x) + \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right)$$

$$B = \cos x + \cos (4\pi + \pi - x) + \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{2} + x \right) + \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$B = \cos x + \cos (\pi - x) + \sin \left(-\frac{\pi}{2} + x \right) + \cos \left(-\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$B = \cos x + (-\cos x) + \sin \left(-\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$$

$$B = \cos x - \cos x + \left(-\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) - \sin x$$

$$B = -\cos x - \sin x$$

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

. Fonction sinus

Ex 4B.5 : $f(x) = \sin \frac{x}{2}$

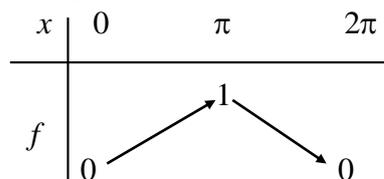
1) $D_f = \mathbb{R}$ et $f(-x) = \sin \frac{-x}{2} = -\sin \frac{x}{2} = -f(x)$ donc **f est impaire** ; on peut donc l'étudier sur \mathbb{R}^+

2) $f(x+4\pi) = \sin \frac{x+4\pi}{2} = \sin \left(\frac{x}{2} + 2\pi \right) = \sin \frac{x}{2} = f(x)$ donc **f est périodique de période 4π** ; on

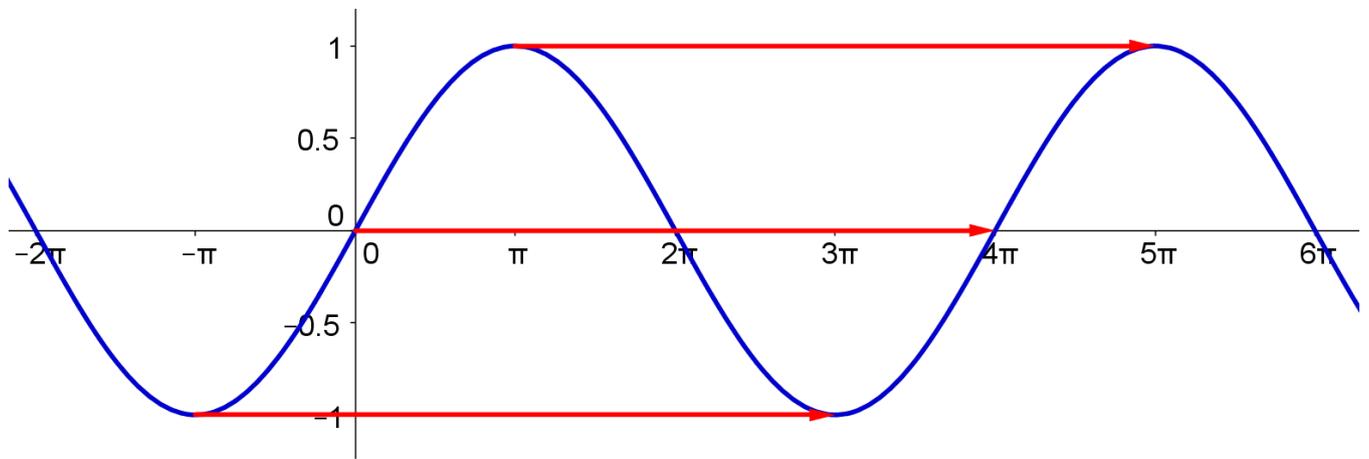
peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude 4π , par exemple : $[-2\pi; 2\pi]$

Ainsi grâce à la parité et à la périodicité de f , on en déduit l'intervalle d'étude : $\mathbf{I} = [0; 2\pi]$

3) En s'inspirant du tableau de la fonction sinus, on obtient :



4) et 5) f est impaire donc C est symétrique par rapport à l'origine O du repère ; on en déduit C sur $[-2\pi; 0]$ et f est périodique de période 4π donc par translation de vecteur $4\pi \vec{i}$, on en déduit C sur $[2\pi; 6\pi]$. Voici la représentation de f sur $[-2\pi; 6\pi]$:



. Fonction cosinus

Ex 4B.6 : $f(x) = \cos 2x$

1) $D_f = \mathbb{R}$ et $f(-x) = \cos(-2x) = \cos 2x = f(x)$ donc **f est paire** ; on peut donc l'étudier sur \mathbb{R}^+

2) $f(x + \pi) = \cos[2(x + \pi)] = \cos[2x + 2\pi] = \cos 2x = f(x)$

donc **f est périodique de période π** ; on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude π ,

soit par exemple : $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Grâce à la parité et à la périodicité de f , on en déduit l'intervalle d'étude : $\mathbf{I} = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

3) en s'inspirant du tableau de la fonction cosinus, on obtient :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f	1	0	-1

4) et 5) f est paire donc C est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

→ on en déduit C sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

f est périodique de période π donc par translation de vecteur $\pi \vec{i}$, on en déduit C sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

d'où la représentation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$:

