Evènements indépendants

Exercice 2C.1

On lance successivement deux fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Etudier l'indépendance des évènements suivants :

a) A : « 3 sort en premier » et B : « 5 sort en second » ;
b) C : « 5 sort en premier » et D : « 5 sort deux fois » ;
c) E : « 1 sort en premier » et F : « 6 sort une fois » ;
d) Trouver deux évènements G et H distincts des précédents et indépendants.

Exercice 2C.2

Dans une urne sont placés 100 jetons rouges dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1.
On ajoute dans cette urne 30 jetons verts numérotés 0.
Combien de jetons verts numérotés 1 faut-il rajouter dans l'urne pour que les évènements A « le jeton est rouge » et B « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne ?

Exercice 2C.3

On lance simultanément deux dés équilibrés, un rouge et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère les évènements suivants :

- R : « le numéro sorti sur le dé rouge est pair » ;
- V : « le numéro sorti sur le dé vert est pair » ;
- S : « la somme des numéros sortis est paire ».

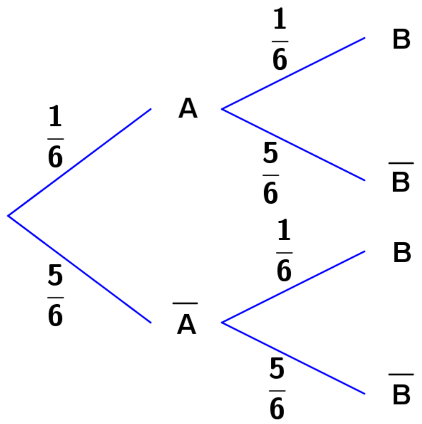
1) Démontrer que S et V sont indépendants.
2) Les évènements S et R sont-ils indépendants ?
3) Les évènements S et $V \cap R$ sont-ils indépendants ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci - Montpellier

Exercice 2C.1

On lance successivement deux fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Etudier l'indépendance des évènements suivants :

a) A : « 3 sort en premier » et B : « 5 sort en second » :



Le dé est équilibré donc $p(\mathrm{A})=\frac{1}{6}$.

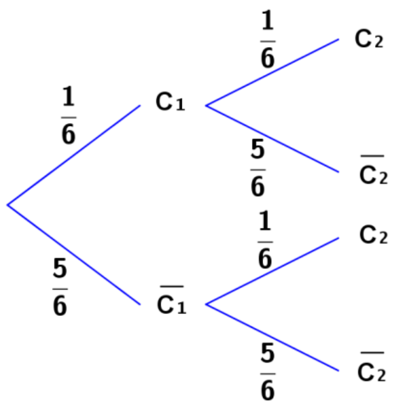
A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{B})=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})$$
$$=p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+p(\overline{\mathrm{A}})\times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}+\frac{5}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Ainsi : $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Et : $p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$: les évènements A et B sont indépendants.

b) C : « 5 sort en premier » et D : « 5 sort deux fois » :



Le dé est équilibré donc $p(\mathrm{C})=\frac{1}{6}$.

Succession d'évènements identiques et indépendants :

$$p(\mathrm{D})=p(\mathrm{C}_1)\times p(\mathrm{C}_2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

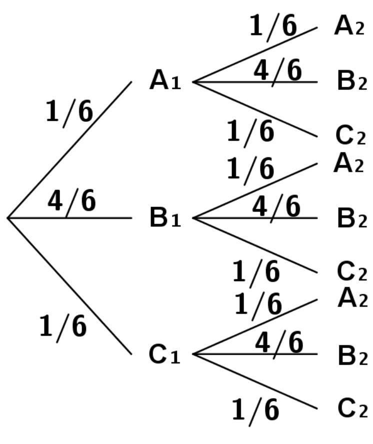
L'évènement $\mathrm{C}\cap\mathrm{D}$ est : « 5 sort en premier », donc :

$$p(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})=p(\mathrm{C})=\frac{1}{6}.$$

Or $p(\mathrm{C})\times p(\mathrm{D})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{216}$

Les évènements C et D ne sont pas indépendants.

c) E : « 1 sort en premier » et F : « 6 sort une fois » :
Soit A l'évènement « on obtient un 1 », B l'évènement « on obtient 2, 3, 4 ou 5 » et C l'évènement « on obtient un 6 ».



Le dé est équilibré donc $p(\mathrm{E})=\frac{1}{6}$.

A, B et C forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{F})=p(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{C}_2)+p(\mathrm{B}_1\cap\mathrm{C}_2)+p(\mathrm{C}_1\cap\mathrm{A}_2)+p(\mathrm{C}_1\cap\mathrm{B}_2)$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

L'évènement $\mathrm{E}\cap\mathrm{F}$ est « 1 sort en premier, 6 sort en deuxième »

Donc : $p(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})=p(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{C}_2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

Or $p(\mathrm{E})\times p(\mathrm{F})=\frac{1}{6}\times\frac{5}{18}=\frac{5}{108}$: les évènements E et F ne sont pas indépendants.

d) Trouver deux évènements G et H distincts des précédents et indépendants.
Les sélections de G et H doivent être différentes. Par exemple :
G l'évènement « le nombre obtenu est pair » et H « le nombre obtenu est impair ».

Exercice 2C.2

Dans une urne sont placés 100 jetons rouges dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1.
On ajoute dans cette urne 30 jetons verts numérotés 0.
Combien de jetons verts numérotés 1 faut-il rajouter dans l'urne pour que les évènements A « le jeton est rouge » et B « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne ?

Soit x le nombre de jetons cherché afin d'atteindre cette indépendance :

- le nombre total de jetons est : $100+30+x=130+x$,
- le nombre de jetons rouges est : 100 ,
- le nombre de jetons verts est : $30+x$,
- le nombre de jetons numérotés 0 est : $50+30=80$,
- le nombre de jetons numérotés 1 est : $50+x$.

Ainsi :

$$p(\mathrm{A})=\frac{\text{nombre de jetons rouges}}{\text{nombre total de jetons}}=\frac{100}{130+x}$$

$$p(\mathrm{B})=\frac{\text{nombre de jetons numérotés 0}}{\text{nombre total de jetons}}=\frac{80}{130+x}$$

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{\text{nombre de jetons rouges numérotés 0}}{\text{nombre total de jetons}}=\frac{50}{130+x}.$$

Le critère d'indépendance recherché donne :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})$$

$$\Leftrightarrow \frac{50}{130+x}=\frac{100}{130+x}\times\frac{80}{130+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{50}{130+x}=\frac{8000}{(130+x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{50(130+x)}{(130+x)^2}=\frac{8000}{(130+x)^2}$$

$$\Leftrightarrow 50(130+x)=8000$$

$$\Leftrightarrow 6500+50x=8000$$

$$\Leftrightarrow 50x=8000-6500$$

$$\Leftrightarrow 50x=1500$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1500}{50}=30$$

Il faut ajouter 30 jetons verts numérotés 1 pour que les évènements A et B soient indépendants.

Exercice 2C.3

On lance simultanément deux dés équilibrés, un rouge et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère les évènements suivants :

- R : « le numéro sorti sur le dé rouge est pair » ;
- V : « le numéro sorti sur le dé vert est pair » ;
- S : « la somme des numéros sortis est paire ».

4) Démontrer que S et V sont indépendants.
5) Les évènements S et R sont-ils indépendants ?
6) Les évènements S et $\mathrm{V}\cap\mathrm{R}$ sont-ils indépendants ?