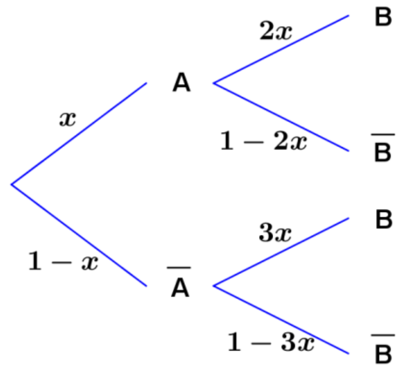
Problèmes de synthèse (*source : ChingAtome*)

Exercice 4.1 :

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité ci-contre et tels qu'il existe un nombre réel x vérifiant :

$$p(\mathrm{A}) = x \quad , \quad p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 2x \quad , \quad p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = 3x .$$



1. Dans cette question, on suppose que $p(\mathrm{B}) = \dfrac{29}{100}$.

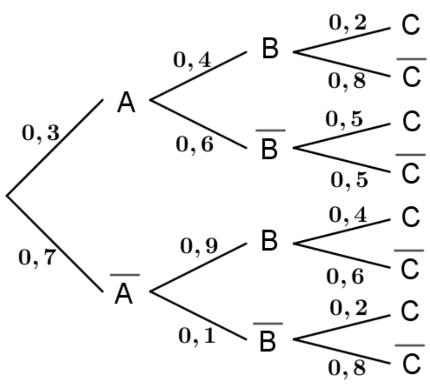
   Déterminer la valeur de x.
2. Dans cette question, on suppose que $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{5}$.

   Déterminer la valeur de x.

Exercice 4.2 :

On considère une expérience aléatoire et trois de ses évènements A, B et C donnant l'arbre de probabilités ci-contre :

1. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
2. Les évènements A et C sont-ils indépendants ?



Exercice 4.3 : ***(lycée Ciselet.fr)***

Une urne contient x boules noires, y boules blanches et trois boules rouges, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

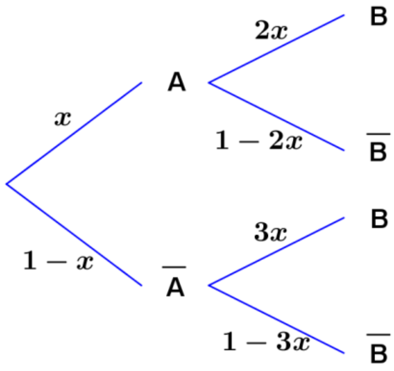
Sachant que la probabilité de tirer une boule noire est égale à $\dfrac{1}{4}$ et que celle d'obtenir une boule blanche est $\dfrac{5}{8}$, déterminer le nombre de boules noires et de de boules blanches dans cette urne.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 4.1 :

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité ci-contre et tels qu'il existe un nombre réel x vérifiant :

$$p(\mathrm{A}) = x \quad , \quad p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 2x \quad , \quad p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = 3x.$$



1. *Dans cette question, on suppose que* $p(\mathrm{B}) = \dfrac{29}{100}$.

   Déterminer la valeur de x.

2. *Dans cette question, on suppose que* $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{5}$.

   Déterminer la valeur de x.

1. A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{B}) &= p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + p\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right) \\ &= p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + p\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) \\ &= x\times 2x + (1-x)\times 3x \\ &= 2x^2 + 3x - 3x^2 \\ &= 3x - x^2 \end{aligned}$$

Or on désire obtenir $p(\mathrm{B}) = \dfrac{29}{100}$, d'où l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & 3x - x^2 = \frac{29}{100} \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 + 3x - \frac{29}{100} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(-x^2 + 3x - \frac{29}{100}\right)\times 100 = 0\times 100 \\ \Leftrightarrow\ & \left(-100x^2 + 300x - 29\right)\times(-1) = 0\times(-1) \\ \Leftrightarrow\ & 100x^2 - 300x + 29 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = (-300)^2 - 4\times 100\times 29 = 90000 - 11600 = 78400 = 280^2$ → $\Delta > 0$: 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-(-300) - 280}{2\times 100} = \frac{300-280}{200} = \frac{20}{200} = 0,1$$

$$x_2 = \frac{-(-300) + 280}{2\times 100} = \frac{300+280}{200} = \frac{580}{200} = 2,9$$

Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1 donc on ne retient que la première solution :

$x_1 = 0,1$

2. D'après la formule des probabilités conditionnelles (formule de Bayes) :

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})} = \frac{p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + p\left(\overline{\mathrm{A}}\right)\times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})} = \frac{x\times 2x}{x\times 2x + (1-x)\times 3x} = \frac{2x^2}{3x - x^2}$$

$$= \frac{\boxed{x}\times 2x}{\boxed{x}\times(3-x)} = \frac{2x}{3-x}$$

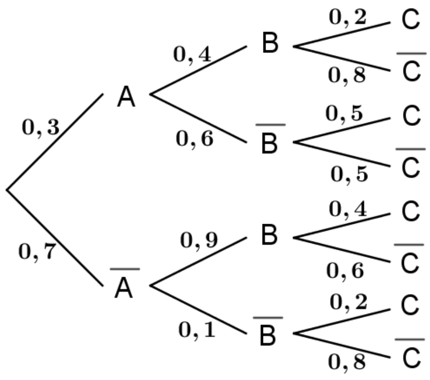
Or on désire obtenir $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{5}$, d'où l'équation suivante :

$$\frac{2x}{3-x}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5\times 2x=1\times(3-x) \Leftrightarrow 10x=3-x \Leftrightarrow 10x+x=3 \Leftrightarrow 11x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{11}$$

Exercice 4.2 :

On considère une expérience aléatoire et trois de ses évènements A, B et C donnant l'arbre de probabilités ci-contre :

1. *Déterminer la probabilité de l'évènement C.*
2. *Les évènements A et C sont-ils indépendants ?*



1. Les évènements A et $\overline{\text{A}}$ forment une partition de l'univers.

Les évènements $\text{A}\cap\text{B}$, $\text{A}\cap\overline{\text{B}}$, $\overline{\text{A}}\cap\text{B}$ et $\overline{\text{A}}\cap\overline{\text{B}}$ forment une autre partition de l'univers.

D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}p(\text{C}) &= p((\text{A}\cap\text{B})\cap\text{C})+p\left((\text{A}\cap\overline{\text{B}})\cap\text{C}\right)+p\left((\overline{\text{A}}\cap\text{B})\cap\text{C}\right)+p\left((\overline{\text{A}}\cap\overline{\text{B}})\cap\text{C}\right)\\
&= p(\text{A}\cap\text{B})\times p_{\text{A}\cap\text{B}}(\text{C})+p(\text{A}\cap\overline{\text{B}})\times p_{\text{A}\cap\overline{\text{B}}}(\text{C})+p(\overline{\text{A}}\cap\text{B})\times p_{\overline{\text{A}}\cap\text{B}}(\text{C})+p(\overline{\text{A}}\cap\overline{\text{B}})\times p_{\overline{\text{A}}\cap\overline{\text{B}}}(\text{C})\\
&= 0,3\times 0,4\times 0,2+0,3\times 0,6\times 0,5+0,7\times 0,9\times 0,4+0,7\times 0,1\times 0,2\\
&= 0,024+0,090+0,252+0,014\\
&= 0,38\end{aligned}$$

2. D'après l'énoncé : $p(\text{A})=0,3$. Ainsi :

$$p(\text{A})\times p(\text{C})=0,3\times 0,38=0,114.$$

D'après l'arbre :

$$\text{A}\cap\text{C}=(\text{A}\cap\text{B}\cap\text{C})\cup(\text{A}\cap\overline{\text{B}}\cap\text{C})$$

Donc : $$\begin{aligned}p(\text{A}\cap\text{C}) &= p(\text{A}\cap\text{B}\cap\text{C})+p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}\cap\text{C})\\
&= 0,3\times 0,4\times 0,2+0,3\times 0,6\times 0,5\\
&= 0,024+0,090\\
&= 0,114\\
&= p(\text{A})\times p(\text{C})\end{aligned}$$

Les évènements A et C sont indépendants.

Exercice 4.3 :

Une urne contient x boules noires, y boules blanches et trois boules rouges, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

Sachant que la probabilité de tirer une boule noire est égale à $\frac{1}{4}$ et que celle d'obtenir une boule blanche est $\frac{5}{8}$, déterminer le nombre de boules noires et de de boules blanches dans cette urne.

La probabilité de tirer une boule noire est : $\frac{x}{x+y+3}$.

La probabilité de tirer une boule blanche est : $\frac{y}{x+y+3}$.

On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+y+3} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{y}{x+y+3} = \dfrac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = x+y+3 \\ 8y = 5x+5y+15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=3 \\ -5x+3y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x-3 \\ -5x+3(3x-3)=15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-3 \\ -5x+9x-9=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-3 \\ 4x=15+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3\times 6-3=15 \\ x=\dfrac{24}{4}=6 \end{cases}$$

Il y a donc 6 boules noires et 15 boules blanches dans cette urne.