1$^{\text{ère}}$ Spé — **Notre Dame de La Merci** — Lundi 13 décembre 2021

Nom : …………………… — **Montpellier**

Contrôle sur les probabilités conditionnelles

Quels que soient les progrès des connaissances humaines,
il y aura toujours place pour l'ignorance et par suite pour le hasard et la probabilité.
Emile Borel
Le hasard, ce sont les lois que nous ne connaissons pas.

Exercice 1. ***(5 points)***

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « *la plate* » et « *la japonaise* ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.

Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.

Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur.

On suppose que toutes les huîtres ont la même chance d'être choisies.

On considère les événements suivants :

- J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
- C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

a) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
b) Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.
c) Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est 0, 695.
d) Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

Exercice 2. ***(5 points)***

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.

Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0, 24 ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0, 235.

On définit les événements suivants :

- D : « la balle est envoyée à droite » ;
- L : « la balle est liftées » ;
- C : « la balle est coupée ».

1) Recopier puis remplir le tableau de probabilité double entrée suivant :

	D	$\overline{D}$	Total
L			
C			
Total			1

2) Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?
3) Si le lance-balle envoie une balle à gauche, quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas coupée ?

Exercice 3. ***(5 points)***

Dans une urne sont placés 100 jetons rouges dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1.

On ajoute dans cette urne 30 jetons verts numérotés 0.

Combien de jetons verts numérotés 1 faut-il rajouter dans l'urne pour que les évènements A « le jeton est rouge » et B « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne ?

(indices : vous ferez un schéma complet et appellerez x le nombre de jetons verts numérotés 1 ajoutés)

Exercice 4. ***(5 points)***

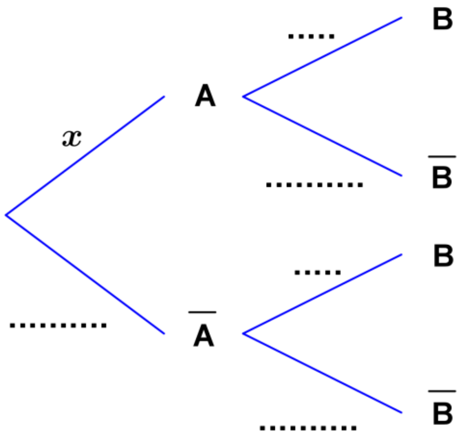
Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité ci-contre et tels qu'il existe un nombre réel x vérifiant :

$$p(\mathrm{A}) = x \quad , \quad p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 4x \quad , \quad p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = 2x \, .$$

1. Compléter l'arbre ci-contre.

2. Dans cette question, on suppose que $p(\mathrm{B}) = 0{,}15$.

Déterminer la valeur de x.



1$^{\text{ère}}$ Spé **Notre Dame de La Merci** Lundi 13 décembre 2021

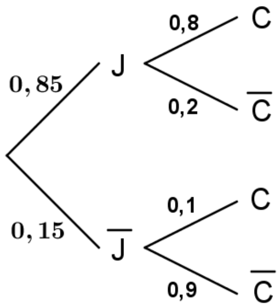
Contrôle sur les probabilités conditionnelles – CORRIGE

Exercice 1 *(5 points)*

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.
Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur.
On suppose que toutes les huîtres ont la même chance d'être choisies.
On considère les événements suivants :

- *J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,* • *C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».*

a) *Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.*



b) *Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.*

$$p\left(\overline{J}\cap C\right)=p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(C)=0{,}15\times 0{,}1=0{,}015$$

c) *Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est 0, 695.*

J et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(C)=p(J\cap C)+p\left(\overline{J}\cap C\right)=p(J)\times p_J(C)+0{,}015=0{,}85\times 0{,}8+0{,}015=0{,}695$$

d) *Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?*

$$p_C\left(\overline{J}\right)=\frac{p\left(\overline{J}\cap C\right)}{p(C)}=\frac{0{,}015}{0{,}695}\simeq 0{,}022$$

Exercice 2 *(5 points)*

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.
Le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- *la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0, 24 ;*
- *la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0, 235.*

On définit les événements suivants :

- *D : « la balle est envoyée à droite » ;*
- *L : « la balle est liftées » ;* • *C : « la balle est coupée ».*

1) *Recopier puis remplir le tableau de probabilité double entrée suivant :*

	D	$\overline{D}$	Total
L	0, 24	0, 265	0, 505
C	0, 26	0, 235	0, 495
Total	0, 5	0, 5	1

2) Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

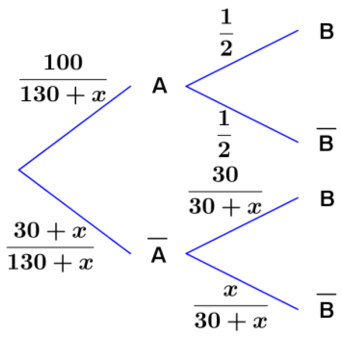
$$p_C(D)=\frac{p(C\cap D)}{p(C)}=\frac{0{,}26}{0{,}495}\simeq 0{,}5253=0{,}\overline{52}$$

3) Si le lance-balle envoie une balle à gauche, quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas coupée ?

$$p_{\overline{D}}(L)=\frac{p\left(\overline{D}\cap L\right)}{p\left(\overline{D}\right)}=\frac{0{,}265}{0{,}5}\simeq 0{,}53$$

Exercice 3 *(5 points)*

Dans une urne sont placés 100 jetons rouges dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1.
On ajoute dans cette urne 30 jetons verts numérotés 0.
Combien de jetons verts numérotés 1 faut-il rajouter dans l'urne pour que les évènements A « le jeton est rouge » et B « le jeton est numéroté 0 » soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne ?



Soit x le nombre de jetons verts numérotés 1 ajoutés.

→l'urne contient désormais $130+x$ jetons :

100 jetons rouges dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1.
$30+x$ jetons verts dont 50 portent le numéro 0 et x portent le numéro 1.
On obtient l'arbre de probabilité ci-contre.
Ainsi :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre de jetons rouges}}{\text{nombre total de jetons}} = \frac{100}{130+x}$$

A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}})\times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$$
$$= \frac{100}{130+x}\times\frac{1}{2} + \frac{30+x}{130+x}\times\frac{30}{30+x} = \frac{50}{130+x} + \frac{30}{130+x} = \frac{80}{130+x}$$

D'autre part :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{100}{130+x}\times\frac{1}{2} = \frac{50}{130+x}$$

Pour que les évènements A et B soient indépendants, on doit avoir :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})$$
$$\Leftrightarrow \frac{50}{130+x} = \frac{100}{130+x}\times\frac{80}{130+x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{50}{130+x}\times\frac{130+x}{130+x} = \frac{100\times 80}{(130+x)^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6500+50x}{(130+x)^2} = \frac{8000}{(130+x)^2}$$
$$\Leftrightarrow 6500+50x = 8000$$
$$\Leftrightarrow 50x = 8000-6500$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1500}{50} = 30$$

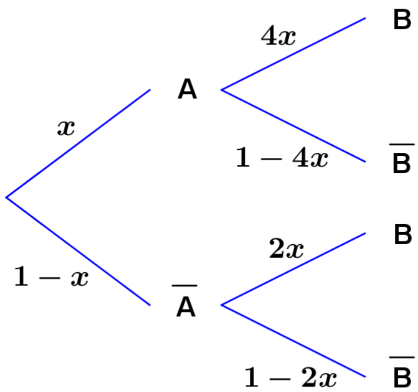
En ajoutant 30 jetons verts numérotés 1, les évènements A et B deviennent indépendants.

Exercice 4 *(5 points)*

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité ci-contre et tels qu'il existe un nombre réel x vérifiant :

$$p(\mathrm{A}) = x \quad , \quad p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 4x \quad , \quad p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = 2x .$$

Compléter l'arbre ci-contre.



Dans cette question, on suppose que $p(\mathrm{B}) = 0{,}15$.

Déterminer la valeur de x.

A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$
\begin{aligned}
p(\mathrm{B}) &= p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})\\
&= p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{A}})\times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})\\
&= x\times 4x + (1-x)\times 2x\\
&= 4x^2 + 2x - 2x^2\\
&= 2x^2 + 2x
\end{aligned}
$$

La relation $p(\mathrm{B}) = 0{,}15$ donne :

$$
\begin{aligned}
& 2x^2 + 2x = 0{,}15\\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 + 2x - 0{,}15 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left(2x^2 + 2x - 0{,}15\right)\times 100 = 0\times 100\\
\Leftrightarrow\ & 200x^2 + 200x - 15 = 0\\
\Leftrightarrow\ & \frac{200x^2 + 200x - 15}{5} = \frac{0}{5}\\
\Leftrightarrow\ & 40x^2 + 40x - 3 = 0
\end{aligned}
$$

Discriminant :

$\Delta = 40^2 - 4\times 40\times(-3) = 1600 + 480 = 2080$ donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-40-\sqrt{2080}}{2\times 40} = \frac{-40-\sqrt{2080}}{80} = \frac{-10-\sqrt{130}}{20} \simeq -1{,}07$$

et $$x_2 = \frac{-40+\sqrt{2080}}{2\times 40} = \frac{-40+\sqrt{2080}}{80} = \frac{-10-\sqrt{130}}{20} \simeq 0{,}07 .$$

En retenant la solution positive, on obtient :

$x = 0{,}07$