1ère Spé — **_Notre Dame de La Merci_** — Mardi 07 décembre 2020

Nom : ……………………. — **_Montpellier_**

Contrôle sur les probabilités conditionnelles

Quels que soient les progrès des connaissances humaines,
il y aura toujours place pour l'ignorance et par suite pour le hasard et la probabilité.
Emile Borel
Le hasard, ce sont les lois que nous ne connaissons pas.

Exercice 1. ***(10 min – 4 points)***

On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilité	$\frac{1}{12}$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	

1. Déterminer la valeur de a.
2. <u>Ecrire chacun des évènements suivants sous forme d'un ensemble</u> puis déterminer sa probabilité.
   - **a.** A : « Obtenir un chiffre pair »
   - **b.** B : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 »
   - **c.** $C = A \cup B$.

Exercice 2 : ***(10 min – 4 points)***

Au rayon des guirlandes lumineuses d'un magasin de décoration, 66% des guirlandes fonctionnent sur secteur et les autres avec des piles. Parmi les guirlandes fonctionnant avec des piles, 42% ont l'option minuteur et parmi celles qui fonctionnent sur secteur, 38% ont cette option.

On choisit au hasard une guirlande dans le rayon.

On note S l'événement : « La guirlande fonctionne sur secteur » et M l'événement : « La guirlande a l'option minuteur »

a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Calculer $p(S \cap M)$ et $p(\bar{S} \cap M)$.

c) En déduire $p(M)$, puis $p_M(S)$.

d) Rédiger une phrase pour interpréter les deux probabilités précédentes.

Exercice 3. ***(10 min – 4 points)***

Le tableau ci-contre donne la répartition des communes de deux départements en fonction de leur nombre d'habitants *N*. (Source : Insee.)

	Charente-Maritime	Yvelines	Total
$N < 500$	215	54	………..
$500 \leq N < 1000$	129	67	………..
$1000 \leq N < 3500$	99	58	………..
$N \geq 3500$	29	83	………..
Total	………..	………..	………..

1. Compléter le tableau.
2. On choisit au hasard une commune parmi les communes de ces deux départements.
   Quelle est la probabilité que cette commune soit une commune de Charente-Maritime ?
3. **a.** On choisit au hasard une commune de Charente-Maritime.
   Quelle est la probabilité que cette commune ait moins de 1 000 habitants ?
   b. On choisit au hasard une commune des Yvelines.
   Quelle est la probabilité que cette commune ait moins de 1 000 habitants ?
4. On choisit au hasard une commune parmi celles qui ont moins de 1 000 habitants.
   Quelle est la probabilité que ce soit une commune de Charente-Maritime ?

Exercice 4 ***(20 min – 8 points)***

Un groupe d'élèves d'une classe de Première veut organiser un concert de musique à l'intérieur du lycée.
Il fait une enquête pour connaître le nombre d'élèves souhaitant assister à ce concert.
450 élèves ont répondu à cette enquête, 270 filles et 180 garçons.

→144 filles et 72 garçons sont favorables.

On note :

F l'événement « la fiche est celle d'une fille »,
G l'événement « la fiche est celle d'un garçon »,
A l'événement « l'élève souhaite assister au concert »,
$\overline{A}$ l'événement complémentaire de A.

1. Dresser un arbre de probabilité.
2. On sort une fiche au hasard parmi les 450 fiches réponses.
   Donner les probabilités $p(G)$, $p(A)$, $p(G \cap A)$ et $p(G \cup A)$.
3. Les événements G et A sont-ils indépendants ?
4. Calculer la probabilité $p(F \cap A)$ puis $p_F(A)$.
5. Calculer les probabilités des événements « A sachant G », « G sachant A ».
6. Compléter l'arbre des probabilités.
7. Donner les probabilités suivantes : $p(\overline{A} \cap F)$ et $p(\overline{A} \cap G)$.

   En déduire $p(\overline{A})$ de deux manières.

1$^{\text{ère}}$ Spé **Notre Dame de La Merci** Mardi 07 décembre 2020

Contrôle sur les probabilités conditionnelles - CORRIGE

Exercice 1. ***(10 min – 4 points)***

On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Face	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Total*
Probabilité	$\frac{1}{12}$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	

1. *Déterminer la valeur de a.*

La somme des probabilités doit être égale à 1, donc :

$$\frac{1}{12}+a+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12}+a+\frac{3}{12}+\frac{1}{12}+\frac{4}{12}+\frac{1}{12}=1$$

$$\Leftrightarrow a+\frac{10}{12}=1$$

$$\Leftrightarrow a=1-\frac{10}{12}=\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

2. *Ecrire chacun des évènements suivants sous forme d'un ensemble puis déterminer sa probabilité.*

a. *A : « Obtenir un chiffre pair »*

$$p(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

b. *B : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 »*

$$p(B)=1-p(\text{obtenir un }6)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

c. $\mathrm{C}=\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$.

$\mathrm{C}=\{1;2;3;4;5;6\}$ donc :

$$p(C)=1.$$

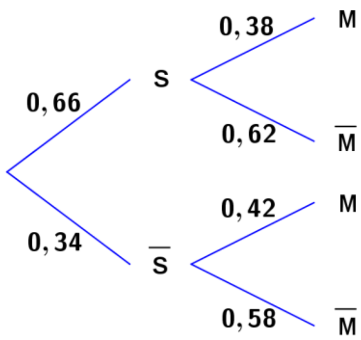
Exercice 2 : ***(10 min – 4 points)***

Au rayon des guirlandes lumineuses d'un magasin de décoration, 66% des guirlandes fonctionnent sur secteur et les autres avec des piles. Parmi les guirlandes fonctionnant avec des piles, 42% ont l'option minuteur et parmi celles qui fonctionnent sur secteur, 38% ont cette option.

On choisit au hasard une guirlande dans le rayon.

On note S l'événement : « La guirlande fonctionne sur secteur » et M l'événement : « La guirlande a l'option minuteur »

a) *Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.*



b) *Calculer* $p(\mathrm{S}\cap\mathrm{M})$ *et* $p(\overline{\mathrm{S}}\cap\mathrm{M})$.

$$p(\mathrm{S}\cap\mathrm{M})=p(\mathrm{S})\times p_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})=0,66\times0,38=0,2508$$

$$p\left(\overline{\mathrm{S}}\cap\mathrm{M}\right)=p\left(\overline{\mathrm{S}}\right)\times p_{\overline{\mathrm{S}}}\left(\mathrm{M}\right)=0,34\times 0,42=0,1428$$

c) *En déduire* $p(\mathrm{M})$, *puis* $p_{\mathrm{M}}(\mathrm{S})$.

S et $\overline{\mathrm{S}}$ forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{M})=p(\mathrm{S}\cap\mathrm{M})+p\left(\overline{\mathrm{S}}\cap\mathrm{M}\right)=0,2508+0,1428=0,3936.$$

Formule :

$$p_{\mathrm{M}}(\mathrm{S})=\frac{p(\mathrm{S}\cap\mathrm{M})}{p(\mathrm{M})}=\frac{0,2508}{0,3936}\simeq 0,6372.$$

d) *Rédiger une phrase pour interpréter les deux probabilités précédentes.*

$p(\mathrm{M})$: la probabilité qu'une guirlande possède un minuteur est d'environ 39,36 %.

$p_{\mathrm{M}}(\mathrm{S})$: environ 63,72 % des guirlandes possédant un émetteur fonctionnent sur secteur.

Exercice 3. ***(10 min – 4 points)***

Le tableau ci-contre donne la répartition des communes de deux départements en fonction de leur nombre d'habitants *N*. (Source : Insee.)

	Charente-Maritime	Yvelines	Total
$N<500$	215	54	**269**
$500\leq N<1000$	129	67	**196**
$1000\leq N<3500$	99	58	**157**
$N\geq 3500$	29	83	**112**
Total	**472**	**262**	**734**

1. *Compléter le tableau.*

2. *On choisit au hasard une commune parmi les communes de ces deux départements. Quelle est la probabilité que cette commune soit une commune de Charente-Maritime ?*

$$p=\frac{\text{nombre de communes de Charente-Maritime}}{\text{nombre total de communes}}=\frac{472}{734}\simeq 0,6431$$

3. a. *On choisit au hasard une commune de Charente-Maritime. Quelle est la probabilité que cette commune ait moins de 1 000 habitants ?*

$$p=\frac{\text{nombre de communes de Charente-Maritime ayant moins de 1 000 habitants}}{\text{nombre total de communes de Charente-Maritime}}$$

$$=\frac{215+129}{472}=\frac{344}{472}\simeq 0,7288$$

b. *On choisit au hasard une commune des Yvelines. Quelle est la probabilité que cette commune ait moins de 1 000 habitants ?*

$$p=\frac{\text{nombre de communes des Yvelines ayant moins de 1 000 habitants}}{\text{nombre total de communes des Yvelines}}$$

$$=\frac{54+67}{262}=\frac{121}{262}\simeq 0,4618$$

4. *On choisit au hasard une commune parmi celles qui ont moins de 1 000 habitants. Quelle est la probabilité que ce soit une commune de Charente-Maritime ?*

$$p=\frac{\text{nombre de communes de Charente-Maritime ayant moins de 1 000 habitants}}{\text{nombre total de communes ayant moins de 1 000 habitants}}$$

$$=\frac{215+129}{269+196}=\frac{344}{465}\simeq 0,7398$$

Exercice 4 ***(20 min – 8 points)***

Un groupe d'élèves d'une classe de Première veut organiser un concert de musique à l'intérieur du lycée.
Il fait une enquête pour connaître le nombre d'élèves souhaitant assister à ce concert.
450 élèves ont répondu à cette enquête, 270 filles et 180 garçons.
→144 filles et 72 garçons sont favorables.

On note :

F l'événement « la fiche est celle d'une fille »,
G l'événement « la fiche est celle d'un garçon »,
A l'événement « l'élève souhaite assister au concert »,
$\overline{\text{A}}$ l'événement complémentaire de A.

1. *Dresser un arbre de probabilité.*

Voici quelques calculs au préalable afin de simplifier l'écriture des pondérations dans l'arbre :

$$p(\text{F})=\frac{\text{nb de filles}}{\text{nb élèves}}=\frac{270}{450}=\frac{27}{45}=\frac{9\times3}{9\times5}=\frac{3}{5}=0,6$$

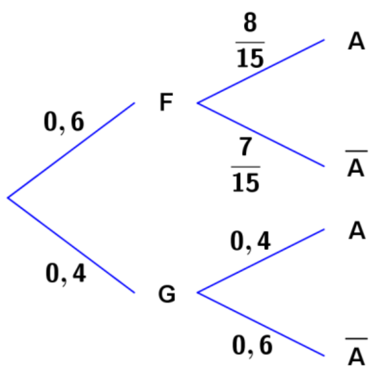
$$p_{\text{F}}(\text{A})=\frac{\text{nb de filles désirant assister au concert}}{\text{nb de filles}}=\frac{144}{270}=\frac{72}{135}=\frac{9\times8}{9\times15}=\frac{8}{15}$$

$$p_{\text{F}}\left(\overline{\text{A}}\right)=1-p_{\text{F}}(\text{A})=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$$

$$p(\text{G})=1-p(\text{F})=1-0,6=0,4$$

$$p_{\text{G}}(\text{A})=\frac{\text{nb de garçons désirant assister au concert}}{\text{nb de garçons}}=\frac{72}{180}=\frac{36}{90}=\frac{9\times4}{9\times10}=\frac{4}{10}=0,4$$

$$p_{\text{G}}\left(\overline{\text{A}}\right)=1-p_{\text{G}}(\text{A})=1-0,4=0,6$$



2. *On sort une fiche au hasard parmi les 450 fiches réponses.*
Donner les probabilités $p(\text{G})$, $p(\text{A})$, $p(\text{G}\cap\text{A})$ et $p(\text{G}\cup\text{A})$.

$$p(\text{G})=1-p(\text{F})=1-0,6=0,4$$

$$p(\text{A})=\frac{\text{nb d'élèves désirant assister au concert}}{\text{nb élèves}}=\frac{144+72}{450}=\frac{216}{450}=\frac{108}{225}=0,48$$

Autre méthode : F et G forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}p(\text{A})&=p(\text{F}\cap\text{A})+p(\text{G}\cap\text{A})\\&=p(\text{F})\times p_{\text{F}}(\text{A})+p(\text{G})\times p_{\text{G}}(\text{A})\\&=0,6\times\frac{8}{15}+0,4\times0,4\\&=0,48\end{aligned}$$

$$p(\text{G}\cap\text{A})=p(\text{G})\times p_{\text{G}}(\text{A})=0,4\times0,4=0,16$$

$$p(\text{G}\cup\text{A})=p(\text{G})+p(\text{A})-p(\text{G}\cap\text{A})=0,4+0,48-0,16=0,72$$

3. *Les événements G et A sont-ils indépendants ?*

$$p(\text{G}\cap\text{A})=0,16 \quad \text{et} \quad p(\text{G})\times p(\text{A})=0,4\times0,48=0,192$$

Donc $p(G\cap A)\neq p(G)\times p(A)$: les évènements A et G ne sont pas indépendants.

Autre méthode : $p(A)=0,48$ et $p_G(A)=0,16$

Donc $p_G(A)\neq p(A)$: les évènements A et G ne sont pas indépendants.

4. *Calculer la probabilité* $p(F\cap A)$ *puis* $p_F(A)$.

$$p_F(A)=\frac{\text{nb de filles désirant assister au concert}}{\text{nb de filles}}=\frac{144}{270}=\frac{72}{135}=\frac{9\times 8}{9\times 15}=\frac{8}{15}$$

$$p(F\cap A)=p(F)\times p_F(A)=0,6\times\frac{8}{15}=0,32$$

5. *Calculer les probabilités des événements « A sachant G », « G sachant A ».*

$$p_G(A)=0,16$$

$$p_A(G)=\frac{p(A\cap G)}{p(A)}=\frac{0,16}{0,48}=\frac{1}{3}.$$

6. *Compléter l'arbre des probabilités.*

7. *Donner les probabilités suivantes :* $p(\overline{A}\cap F)$ *et* $p(\overline{A}\cap G)$. *En déduire* $p(\overline{A})$ *de deux manières.*

$$p(\overline{A}\cap F)=p(F\cap\overline{A})=p(F)\times p_F(\overline{A})=0,6\times\frac{7}{15}=0,28$$

$$p(\overline{A}\cap G)=p(G\cap\overline{A})=p(G)\times p_G(\overline{A})=0,4\times 0,6=0,24$$

F et G forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\overline{A})=p(F\cap\overline{A})+p(G\cap\overline{A})=0,28+0,24=0,52.$$

Autre méthode :

$$p(\overline{A})=1-p(A)=1-0,48=0,52.$$