Contrôle de Mathématiques

Toute la suite des hommes doit être considérée comme un même homme... (Blaise Pascal)
Le bonheur de demain n'existe pas. Le bonheur, c'est tout de suite ou jamais. (René Barjavel)

Exercice 1 *(3 points)*

On définit comme suit une suite (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 1 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$

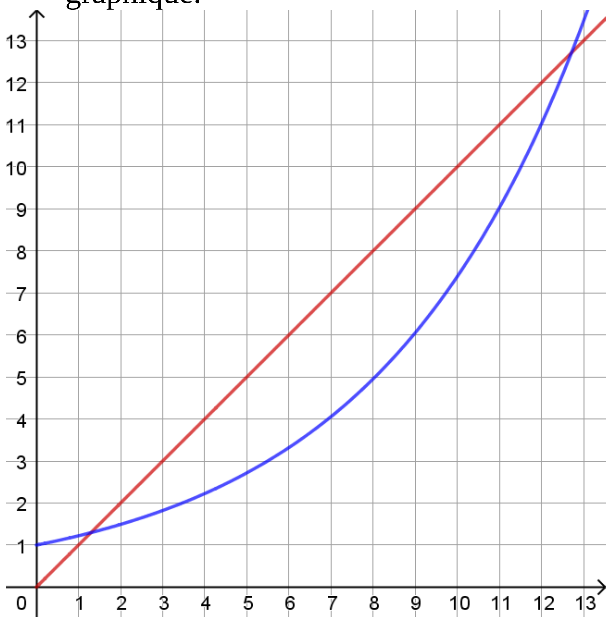
1) Calculer les premiers termes u_2 , u_3 et u_4 en décrivant les calculs.
2) Déterminer avec votre calculatrice la valeur exacte de u_{50}.

Exercice 2 *(6 points)*

1) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

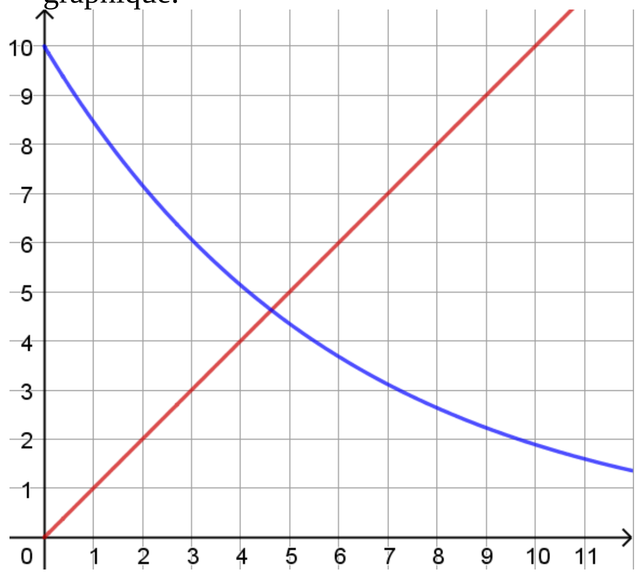
Construire avec précision la valeur des termes u_1 à u_4 (vous laisserez les traits de construction).
Vous indiquerez sur votre copie les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4 obtenues par lecture graphique.



2) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

Construire avec précision la valeur des termes u_1 à u_4 (vous laisserez les traits de construction).
Vous indiquerez sur votre copie les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4 obtenues par lecture graphique.



Exercice 3 *(8 points)*

Etudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

→(sans utiliser de fonction de référence)

a) $u_n = (n-5)^2$, $n \geq 5$ $(n \in \mathbb{N})$

b) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

c) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$

d) $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

tournez svp

Exercice 4 ***(3 points)***

Une fuite dans une piscine implique une perte régulière de 10 % de son volume d'eau chaque semaine, en raison de la pression diminuant régulièrement. Son volume initial est égal à $50\ \text{m}^3$.

On peut décrire cette situation à l'aide de la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 50 \\ u_{n+1} = 0{,}9 \times u_n \end{cases}$.

1) Ecrire un programme python permettant de savoir quel sera le volume d'eau au bout de 6 semaines.

2) Magalie souhaite savoir dans combien de semaines le volume d'eau aura diminué de moitié.
Compléter le **programme python** suivant permettant de répondre à cette question :

```
u = 50
n = ….
while …………………..
    u ………………..
    n …………..
print("le nombre de semaines est",…...)
```

3) Question bonus : avec votre calculatrice, déterminer le nombre de semaines recherché à la question précédente.

Auto-évaluation : …………

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – M. Quet

Exercice 1 *(3 points)*

On définit comme suit une suite (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 1 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1) *Calculer les premiers termes* u_2, u_3 *et* u_4 *en décrivant les calculs.*

$$u_2 = u_{1+1} = u_1 + 2\times 1 - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$$
$$u_3 = u_{2+1} = u_2 + 2\times 2 - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$$
$$u_4 = u_{3+1} = u_3 + 2\times 3 - 1 = 5 + 6 - 1 = 10$$

2) *Déterminer avec votre calculatrice la valeur exacte de* u_{50}.

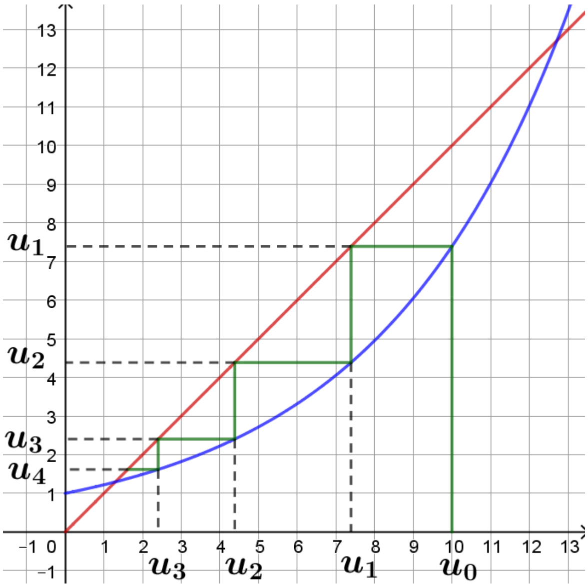
$$u_{50} = 2402$$

Exercice 2 *(6 points)*

1) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Construire avec précision la valeur des termes u_1 à u_4

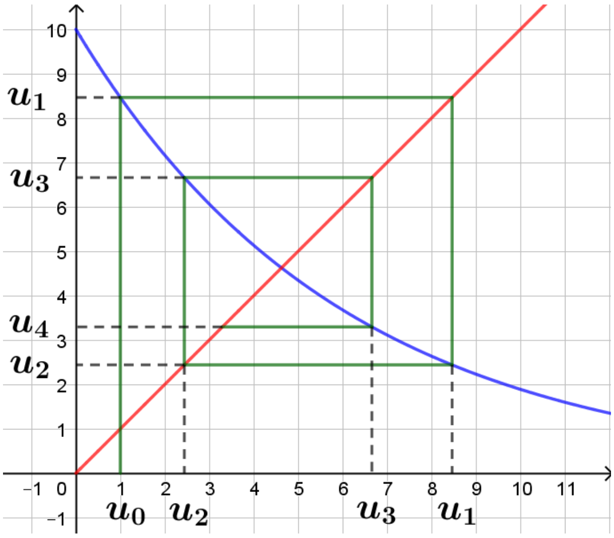


$u_1 \simeq 7{,}4$, $u_2 \simeq 4{,}4$, $u_3 \simeq 2{,}4$, $u_4 \simeq 1{,}6$

2) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

Construire avec précision la valeur des termes u_1 à u_4



$u_1 \simeq 8{,}5$, $u_2 \simeq 2{,}4$, $u_3 \simeq 6{,}7$, $u_4 \simeq 3{,}3$

Exercice 3 *(8 points)*

Etudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

a) $u_n = (n-5)^2$, $n \geq 5$ $(n \in \mathbb{N})$

Première méthode :

$$u_{n+1} - u_n = \left((n+1)-5\right)^2 - (n-5)^2 = (n-4)^2 - (n-5)^2 = \left[(n-4)+(n-5)\right]\left[(n-4)-(n-5)\right]$$
$$= [n-4+n-5][n-4-n+5] = 2n-9$$

$u_{n+1} - u_n > 0 \iff 2n > 9 \iff n > \dfrac{9}{2}$ → Si $n \geq 5$, la suite (u_n) est croissante.

Deuxième méthode :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left((n+1)-5\right)^2}{(n-5)^2} = \frac{(n-4)^2}{(n-5)^2} = \frac{(n-4)^2}{(n-5)^2} = \left(\frac{n-4}{n-5}\right)^2 = \left(\frac{n-5}{n-5} + \frac{1}{n-5}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n-5}\right)^2$$

Si $n > 5$, $\dfrac{1}{n-5} > 0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{n-5} > 1 \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{n-5}\right)^2 > 1$ et la suite (u_n) est croissante.

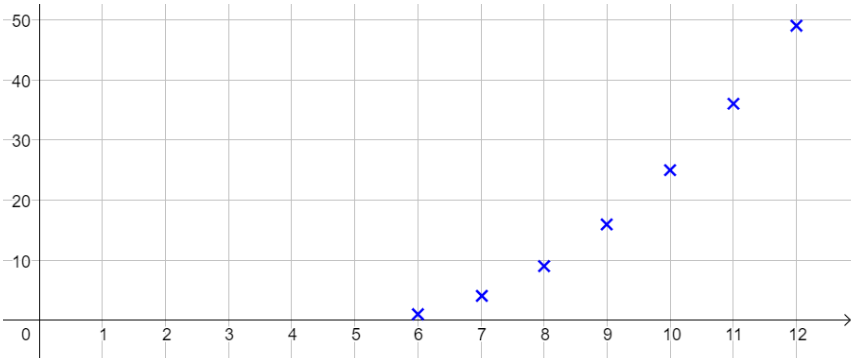
Troisième méthode :

$u_n = n^2 - 10n + 25$ et la fonction associée est : $f(x) = x^2 - 10x + 25$.

$a = 1$ donc cette fonction est représentée par une parabole orientée « vers le haut »

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2\times 1} = 5$$

Si $x \geq 5$, la fonction f est croissante, donc si $n \geq 5$, la suite (u_n) est croissante.



b) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$

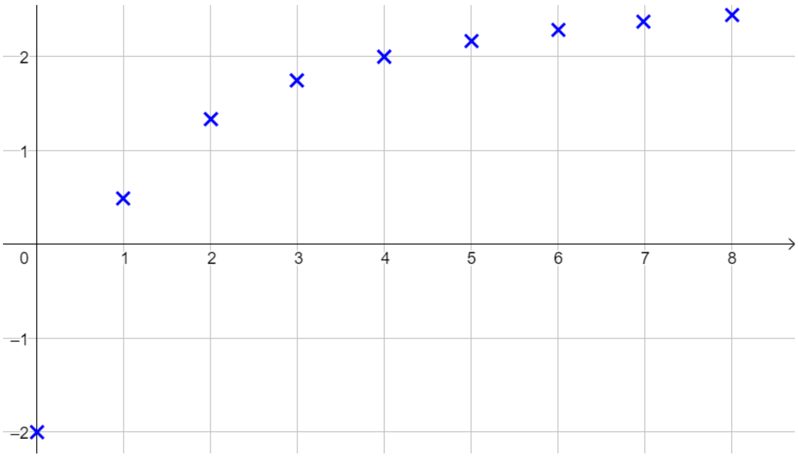
$$u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)-2}{(n+1)+1} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{3n+3-2}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{3n+1}{n+2}\times\frac{n+1}{n+1} - \frac{3n-2}{n+1}\times\frac{n+2}{n+2}$$

$$= \frac{3n^2+3n+n+1}{(n+2)(n+1)} - \frac{3n^2+6n-2n-4}{(n+2)(n+1)} = \frac{3n^2+4n+1-\left(3n^2+4n-4\right)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{3n^2+4n+1-3n^2-4n+4}{(n+2)(n+1)} = \frac{5}{(n+2)(n+1)}$$

Or $n \geq 0$, donc $n+2 \geq 2 \geq 0$ et $n+1 \geq 1 \geq 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est croissante.



c) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$

$u_{n+1} - u_n = -n$

Or $n \geq 0$, donc $-n < 0$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est décroissante.

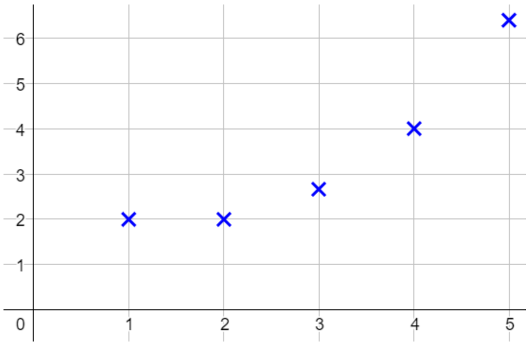
d) $u_n = \dfrac{2^n}{n}\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1} = \frac{n+n}{n+1}$$

Or si $n \geq 1$, alors : $n+n \geq 1+n \iff \dfrac{n+n}{1+n} \geq \dfrac{1+n}{1+n} \iff \dfrac{n+n}{1+n} \geq 1$

Autre méthode finale : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n}{n+1} = \dfrac{n+1+n-1}{n+1} = \dfrac{n+1}{n+1} + \dfrac{n-1}{n+1} = 1 + \dfrac{n-1}{n+1}$ avec $\dfrac{n-1}{n+1} \geq 0$

La suite (u_n) est positive avec $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, donc pour tout $n \geq 1$, la suite (u_n) est croissante.



Exercice 4 (3 points)

Une fuite dans une piscine implique une perte régulière de 10 % de son volume d'eau chaque semaine, en raison de la pression diminuant régulièrement. Son volume initial est égal à 50 m^3.

On peut décrire cette situation à l'aide de la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 50 \\ u_{n+1} = 0,9 \times u_n \end{cases}$.

1) *Ecrire un programme python permettant de savoir quel sera le volume d'eau au bout de 6 semaines.*

```
U = 50
rang = int(input("Saisir le nombre de semaines :"))
for i in range(1,rang+1):
    U = U*0.9
print("Au bout de",rang,"semaines, le volume est :",U)
```

→on obtient : Au bout de 6 semaines, le volume est : 26.572050000000008

2) *Magalie souhaite savoir dans combien de semaines le volume d'eau aura diminué de moitié. Compléter le* ***programme python*** *suivant permettant de répondre à cette question :*

```
U = 50
N = 0
while U > 25:
    U *= 0.9
    N += 1
print("Au bout de",N,"semaines, le volume est :",U)
```

→on obtient : Au bout de 7 semaines, le volume est : 23.914845000000007