1ère Spé Mathématiques — ***Notre Dame de La Merci*** — Mercredi 19 janvier 2022

Contrôle de trigonométrie

Toute la géographie, la trigonométrie et l'arithmétique du monde ne servent à rien si tu n'apprends pas à penser par toi-même. ***Carlos Ruiz Zafon***

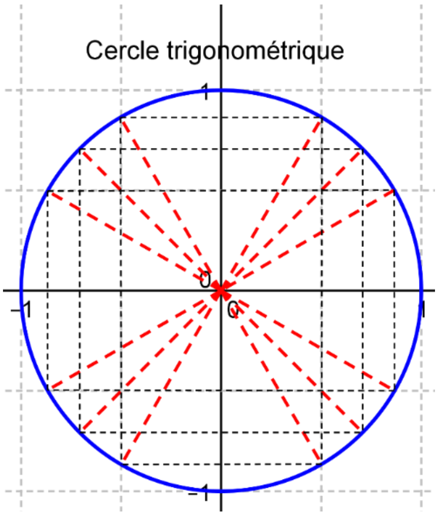
Exercice 1 : ***(5 pt)***

En vous aidant du cercle trigonométrique ci-contre, simplifier au maximum les écritures suivantes :

$$A=\left(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$B=\cos(-x)+\sin(\pi-x)+\cos(x+\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$C=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x-\pi)+\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)$$



Exercice 2 : ***(3 pt)***

Déterminer les mesures principales des angles $\frac{87\pi}{5}$ et $\frac{-62\pi}{7}$. Justifier vos réponses.

Exercice 3 : ***(4 pts)***

Convertir $\frac{12\pi}{25}$ en degré puis convertir $162°$ en radians. Justifier vos réponses.

Exercice 4 : ***(8 pts)***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(4x)$

1) Etudier la parité de la fonction f.
2) Etudier la périodicité de la fonction f. En déduire que l'on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.
3) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ puis sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – M. Quet

Exercice 1 : *(5 pts)*

Simplifier au maximum les écritures suivantes :

$$A=\left(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2}{4}-\left[\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{4}\right]$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{4}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B=\cos(-x)+\sin(\pi-x)+\cos(x+\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos(x)+\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)-\sin(x)$$
$$=\cos(x)$$

$$C=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x-\pi)+\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+\sin\left(-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=-\cos(x)-\cos(x)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\cos(x)-\cos(x)-\cos(x)$$
$$=-3\cos(x)$$

Exercice 2 : *(3 pt)*

En remarquant que : $2\pi=\frac{10\pi}{5}$, on obtient :

$$\frac{87\pi}{5}=\frac{80\pi}{5}+\frac{7\pi}{5}=\frac{90\pi}{5}-\frac{3\pi}{5}$$, or $\frac{7\pi}{5}$ n'est pas une mesure principale

$$\rightarrow \frac{87\pi}{5}=-\frac{3\pi}{5}+9\times2\pi$$

En remarquant que : $2\pi=\frac{14\pi}{7}$, on obtient :

$$\frac{-62\pi}{7}=-\frac{56\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}=-\frac{70\pi}{7}+\frac{8\pi}{7}$$, or $\frac{8\pi}{7}$ n'est pas une mesure principale

$$\rightarrow \frac{-62\pi}{7}=-\frac{6\pi}{7}-4\times2\pi$$

Exercice 3 : **(4 pts)**

Convertir $\dfrac{12\pi}{25}$ *en degré puis convertir* $162°$ *en radians. Justifier vos réponses.*

2π	$\dfrac{12\pi}{25}$
360	x

360	162
2π	x

A partir de ces tableaux de proportionnalité, on réalise des produits en croix :

$$2\pi\times x=\frac{12\pi}{25}\times 360$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{12\pi\times 360}{25\times 2\pi}=\frac{12\times\boxed{5}\times 72}{5\times\boxed{5}\times 2}=86,4°$$

$$360\times x=162\times 2\pi$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{162\times 2\pi}{360}=\frac{9\pi}{10}$$

Exercice 4 : **(8 pts)**

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\cos(4x)$

1) *Etudier la parité de la fonction* f.

$$f(-x)=\cos(4\times(-x))=\cos(-4x)=\cos(4x)=f(x)$$

La fonction f est paire, on peut l'étudier sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) *Etudier la périodicité de la fonction* f. *En déduire que l'on peut étudier la fonction* f *sur l'intervalle* $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Soit p la période cherchée, vérifiant :

$$f(x+p)=f(x)$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos(4(x+p))=\cos(4x)$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos(4x+4p)=\cos(4x)$$

On pose : $\mathrm{X}=4x$, ainsi :

$$\cos(\mathrm{X}+4p)=\cos(\mathrm{X})$$

Or la fonction $\cos(\mathrm{X})$ est 2π-périodique, donc :

$$4p=2\pi$$

$$\Leftrightarrow\quad p=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

La fonction f est $\dfrac{\pi}{2}$-périodique, on peut l'étudier sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

La fonction f étant également paire, on peut l'étudier sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

3) *Dresser le tableau de variation de* f *sur l'intervalle* $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ *puis sur l'intervalle* $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On pose : $\mathrm{X}=4x$, ainsi : si $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, alors $\mathrm{X}\in[0;\pi]$.

Le tableau de variation de la fonction $\cos(\mathrm{X})$ sur l'intervalle $[0;\pi]$ est :

$$\begin{array}{c|ccc}
\mathrm{X} & 0 & & \pi \\
\hline
\cos(\mathrm{X}) & 1 & \searrow & \\
 & & & -1
\end{array}$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction $\cos(4x)$ sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ est :

x	0		$\frac{\pi}{4}$
$\cos(4x)$	1	$\searrow$	-1

En intégrant la parité de la fonction f, on obtient :

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
$\cos(4x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

La fonction f *est* $\frac{\pi}{2}$-périodique, on obtient :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos(4x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

La fonction f *est* $\frac{\pi}{2}$-périodique, on obtient :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos(4x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1