

Dans tous les exercices, on appellera  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère (dont les unités de longueur seront précisées dans chaque exercice).

**EXERCICE 5D.1**

Soit la fonction définie sur  $[-6 ; 3]$  par :

$$f(x) = -x^2 - 4x + 5$$

- Calculer  $f'(x)$  puis étudier son signe.
- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-6 ; 3]$ .
- Déterminer les points d'intersection de  $f$  avec les axes ( $O_x$ ) et ( $O_y$ ).
- Déterminer les coefficients directeurs des tangentes  $(\mathcal{T}_A)$ ,  $(\mathcal{T}_B)$  et  $(\mathcal{T}_C)$  à la courbe  $\mathcal{C}$  aux points A, B et C d'abscisses respectives -5, -2 et 1.
- Construire dans un même repère  $(\mathcal{T}_A)$ ,  $(\mathcal{T}_B)$ ,  $(\mathcal{T}_C)$  et  $\mathcal{C}$  (Unités : 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée).

**EXERCICE 5D.2**

Soit la fonction définie sur  $[-1 ; 2]$  par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$$

- Calculer  $f'(x)$  puis étudier son signe.
- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-1 ; 2]$ .
- Déterminer le point d'intersection de  $f$  avec l'axe ( $O_y$ ) et déterminer le coefficient directeur de la tangente en ce point.
- A l'aide du tableau de variation, indiquer sur quel(s) intervalle(s)  $\mathcal{C}$  coupe l'axe ( $O_x$ ).
- Construire dans un repère la courbe  $\mathcal{C}$  ainsi que ses tangentes (Unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

**EXERCICE 5D.3**

Soit la fonction définie sur  $[-1 ; 3]$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$$

- Calculer  $f'(x)$  puis étudier son signe.
- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-1 ; 3]$ .
- Déterminer le point d'intersection de  $f$  avec l'axe ( $O_y$ ) et déterminer le coefficient directeur de la tangente en ce point.
- A l'aide du tableau de variation, indiquer sur quel(s) intervalle(s)  $\mathcal{C}$  coupe l'axe ( $O_x$ ).
- Construire dans un repère la courbe  $\mathcal{C}$  ainsi que ses tangentes (Unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

**EXERCICE 5D.4**

Soit la fonction définie sur  $[-1,5 ; 3]$  par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

- Calculer  $f'(x)$  puis étudier son signe.
- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-1,5 ; 3]$ .
- Déterminer les points d'intersection de  $f$  avec les axes ( $O_x$ ) et ( $O_y$ ).

- Déterminer les coefficients directeurs des tangentes aux points d'intersection avec les axes.
- Construire dans un repère la courbe  $\mathcal{C}$  ainsi que ses tangentes (Unités : 2 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

**EXERCICE 5D.5**

Soit la fonction définie sur  $[-5 ; 5]$  par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$$

- Calculer  $f'(x)$  puis étudier son signe.
- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-5 ; 5]$ .
- Déterminer les points d'intersection de  $f$  avec les axes ( $O_x$ ) et ( $O_y$ ).
- Construire dans un repère la courbe  $\mathcal{C}$  ainsi que ses tangentes (Unités : 1 cm en abscisse et 6 cm en ordonnée).

**EXERCICE 5D.6**

Soit la fonction définie sur  $[-2 ; 3]$  par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1$$

- Calculer  $f'(x)$  puis étudier son signe.
- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-2 ; 3]$ .
- Déterminer les points d'intersection de  $f$  avec les axes ( $O_x$ ) et ( $O_y$ ).
- Déterminer les coefficients directeurs des tangentes aux points d'intersection avec les axes.
- Construire dans un repère la courbe  $\mathcal{C}$  ainsi que ses tangentes (Unités : 2 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

**EXERCICE 5D.7**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-3 ; 4]$  par :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$$

- Calculer  $f'(x)$
  - Vérifier que 3 est une racine de  $f'(x)$ .
  - Factoriser  $f'(x)$  sous la forme  $(x-3).P(x)$
  - Etudier le signe de  $P(x)$ .
  - En déduire le signe de  $f'(x)$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[-3 ; 4]$ .
- Vérifier que -3, 0 et 1 sont des racines de  $f(x)$ .
  - Que peut-on en déduire pour  $\mathcal{C}$  ?
  - Déterminer les coefficients directeurs des tangentes  $(\mathcal{T}_A)$ ,  $(\mathcal{T}_B)$  et  $(\mathcal{T}_C)$  à la courbe  $\mathcal{C}$  aux points A, B et C d'abscisses respectives -3, 0 et 1.
- Construire dans un même repère  $(\mathcal{T}_A)$ ,  $(\mathcal{T}_B)$ ,  $(\mathcal{T}_C)$  et  $\mathcal{C}$  (Unités : 2 cm en abscisse et 0,2 cm en ordonnée).

**CORRIGE – NOTRE DAME DE LA MERCI –  
MONTPELLIER**

**EXERCICE 5D.1**

Soit la fonction définie sur  $[-6 ; 3]$  par :

$$f(x) = -x^2 - 4x + 5$$

a.  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $[-6 ; 3]$ .

$$f'(x) = -2x - 4 \rightarrow -2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$$

ainsi  $f'(x) > 0$  sur  $[-6 ; -2[$

et  $f'(x) < 0$  sur  $] -2 ; 3]$

b. Tableau de variation de  $f$  sur  $[-6 ; 3]$  :

$x$	-6	-2	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-7	9	-16

c. Points d'intersection de  $f$  avec l'axe  $(Ox)$  :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 36 = 6^2$$

$$x_1 = \frac{4-6}{2 \times (-1)} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{4+6}{2 \times (-1)} = -5$$

On obtient les points **A(1 ; 0)** et **B(-5 ; 0)**

Point d'intersection de  $f$  avec l'axe  $(Oy)$  :

$$f(0) = -0^2 - 4 \times 0 + 5 = 5$$

On obtient le point **C(0 ; 5)**

d. Les coefficients directeurs des tangentes  $(\mathcal{D}_A)$ ,  $(\mathcal{D}_B)$  et  $(\mathcal{D}_C)$  à la courbe  $\mathcal{C}$  aux points A, B et C d'abscisses respectives -5, -2 et 1, sont respectivement donnés par les valeurs :

$$f'(-5) = -2 \times (-5) - 4 = 6$$

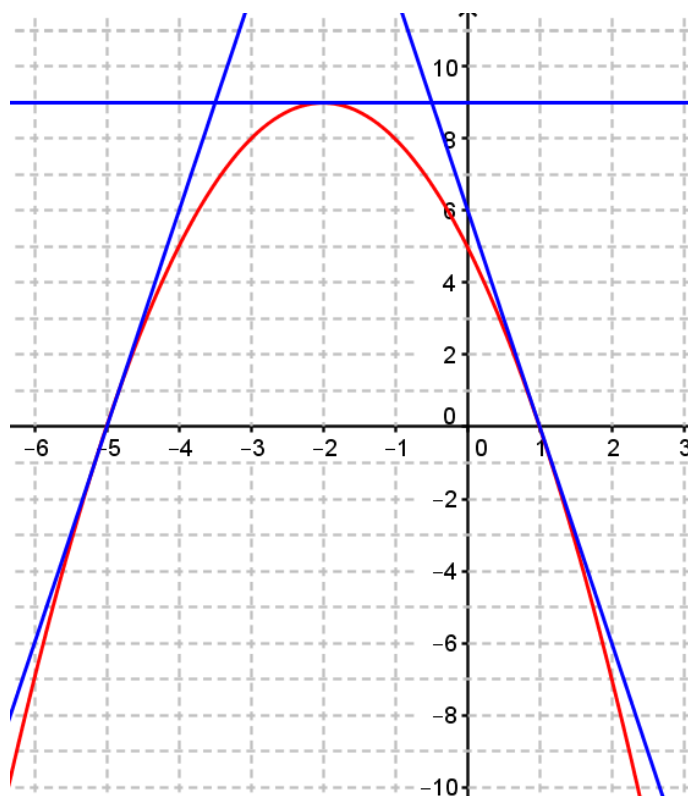
$$f'(-2) = -2 \times (-2) - 4 = 0$$

$$f'(1) = -2 \times 1 - 4 = -6$$

e.  $(T_A) : y = f'(-5)(x + 5) + f(-5) = 6x + 30$

$(T_B) : y = f'(-2)(x + 2) + f(-2) = 9$

$(T_C) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -6x + 6$

**EXERCICE 5D.2**

Soit la fonction définie sur  $[-1 ; 2]$  par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$$

a.  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $[-1 ; 2]$ .

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

$$\rightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\rightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

ainsi  $f'(x) < 0$  sur  $[0 ; 1[$

et  $f'(x) > 0$  sur  $[-1 ; 0[ \cup ]1 ; 2]$

b. Tableau de variation de  $f$  sur  $[-1 ; 2]$  :

$x$	-1	0	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-7	-2	-3	2	

c. Point d'intersection de  $f$  avec l'axe  $(Oy)$  :

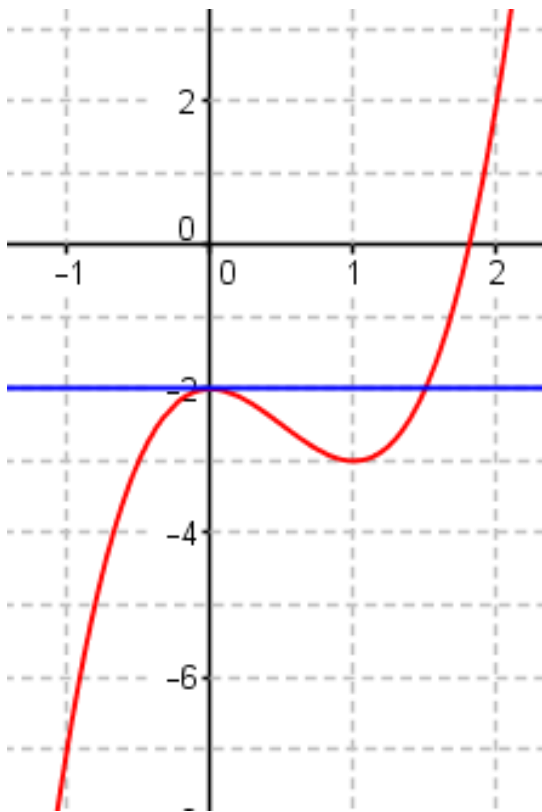
$$f(0) = -2 \rightarrow \text{on obtient le point } \mathbf{A(0 ; -2)}$$

Coefficient directeur de la tangente en ce point :

$$f'(0) = 6 \times 0(0 - 1) = 0$$

d.  $f(1) = -3$  et  $f(2) = 2$  et la fonction est **strictement croissante** sur l'intervalle  $[1 ; 2]$ . D'après le **théorème des valeurs intermédiaires** :  $\mathcal{C}$  coupe l'axe  $(Ox)$  dans l'intervalle  $[1 ; 2]$ .

e. Construire dans un repère la courbe  $\mathcal{C}$  ainsi que ses tangentes (Unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).



**EXERCICE 5D.3**

Soit la fonction définie sur  $[-1 ; 3]$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$$

a.  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $[-1 ; 3]$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$$

Ainsi  $f'(x) \geq 0$  sur  $[-1 ; 3]$ .

b. Tableau de variation de  $f$  sur  $[-1 ; 3]$  :

$x$	-1	1	3
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	-9	-1	7

c. Point d'intersection de  $f$  avec l'axe  $(Oy)$  :

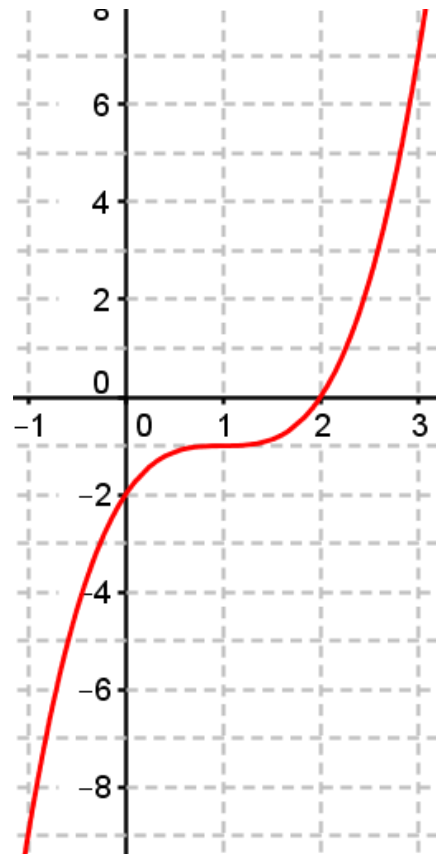
$$f(0) = -2 \rightarrow \text{on obtient le point } A(0 ; -2)$$

Coefficient directeur de la tangente en ce point :

$$f'(0) = 3(0-1)^2 = 3$$

d.  $f(1) = -1$  et  $f(3) = 7$  et la fonction est strictement croissante sur l'intervalle  $[1 ; 3]$ . D'après le **théorème des valeurs intermédiaires** :  $\mathcal{C}$  coupe l'axe  $(Ox)$  dans l'intervalle  $[1 ; 3]$ .

e. Construire dans un repère la courbe  $\mathcal{C}$  ainsi que ses tangentes (Unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).



**EXERCICE 5D.4**

Soit la fonction définie sur  $[-1,5 ; 3]$  par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

a.  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $[-1,5 ; 3]$ .

$$f'(x) = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Ainsi  $f'(x) \geq 0$  sur  $[-1,5 ; 3]$ .

b. Tableau de variation de  $f$  sur  $[-1,5 ; 3]$ .

$x$	-1,5	3
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	0,8

c. Point d'intersection de  $f$  avec l'axe  $(Ox)$  :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$\rightarrow$  on obtient les points  $A(-1 ; 0)$

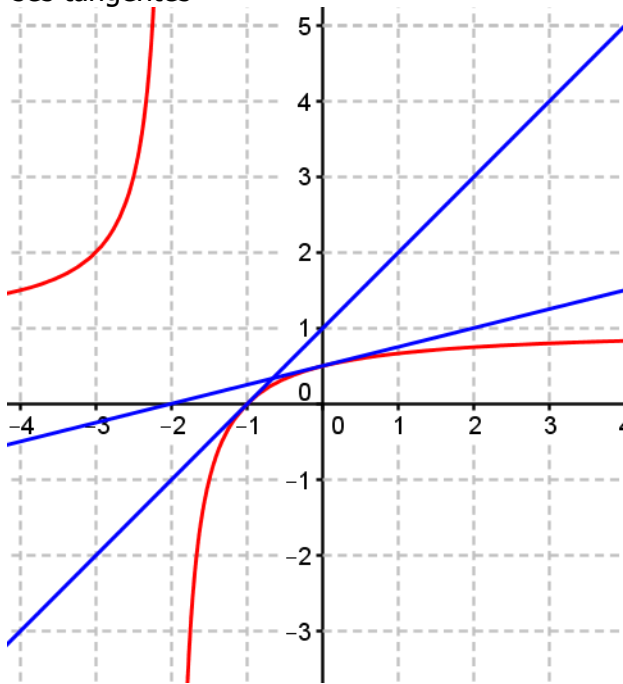
Point d'intersection de  $f$  avec l'axe  $(Oy)$  :

$$f(0) = 0,5 \rightarrow \text{on obtient le point } B(0 ; 0,5)$$

d. Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'intersection avec les axes sont respectivement :

$$f'(-1) = 1 \text{ et } f'(0) = \frac{1}{(0+2)^2} = \frac{1}{4}$$

e. Construire dans un repère la courbe  $c$  ainsi que ses tangentes



**EXERCICE 5D.5**

Soit la fonction définie sur  $[-5 ; 5]$  par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$$

a.  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $[-5 ; 5]$ .

$$f'(x) = \frac{(x^2+3)-(x-1) \times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 16 = 4^2$$

$$x_1 = \frac{-2-4}{2 \times (-1)} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-2+4}{2 \times (-1)} = -1$$

Ainsi  $f'(x) \geq 0$  sur  $[-1 ; 3]$   
 et  $f'(x) < 0$  sur  $[-5 ; -1[ \cup ]3 ; 5]$ .

b. Tableau de variation de  $f$  sur  $[-5 ; 5]$  :

x	-5	-1	3	5	
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	-0,21		0,17	0,14	

c. Point d'intersection de  $f$  avec l'axe ( $O_x$ ) :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

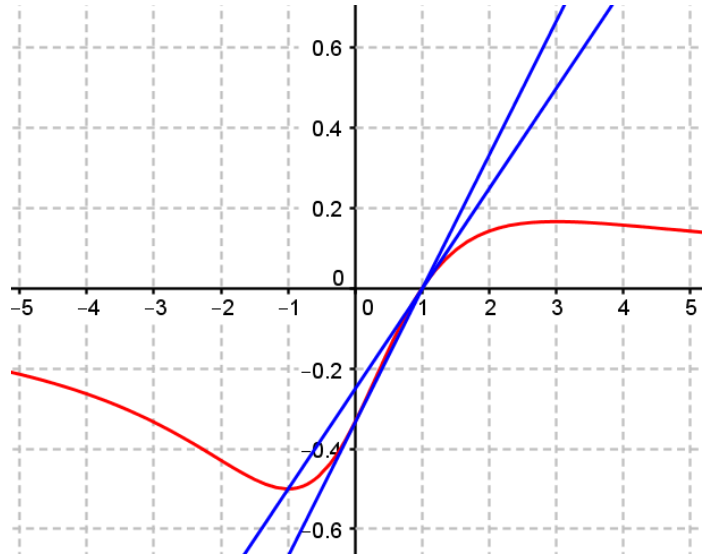
→ on obtient le point **A(1 ; 0)**

Point d'intersection de  $f$  avec l'axe ( $O_y$ ) :

$$f(0) = -\frac{1}{3} \rightarrow \text{on obtient le point } \mathbf{B}\left(0; -\frac{1}{3}\right)$$

d. Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'intersection avec les axes sont respectivement :

$$f'(1) = \frac{1}{4} \text{ et } f'(0) = \frac{1}{3}$$



**EXERCICE 5D.6**

Soit la fonction définie sur  $[-2 ; 3]$  par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 1$$

a.  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $[-2 ; 3]$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \text{ ainsi } f'(x) > 0 \text{ sur } [-2 ; 3]$$

b. Tableau de variation de  $f$  sur  $[-2 ; 3]$  :

x	-2	3
f'(x)		+
f(x)	-1	$\sqrt{5}-1$

c. Point d'intersection de  $f$  avec l'axe ( $O_x$ ) :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow x+2=1$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \rightarrow \text{on obtient le point } \mathbf{A(-1 ; 0)}$$

Point d'intersection de  $f$  avec l'axe ( $O_y$ ) :

$$f(0) = \sqrt{2}-1$$

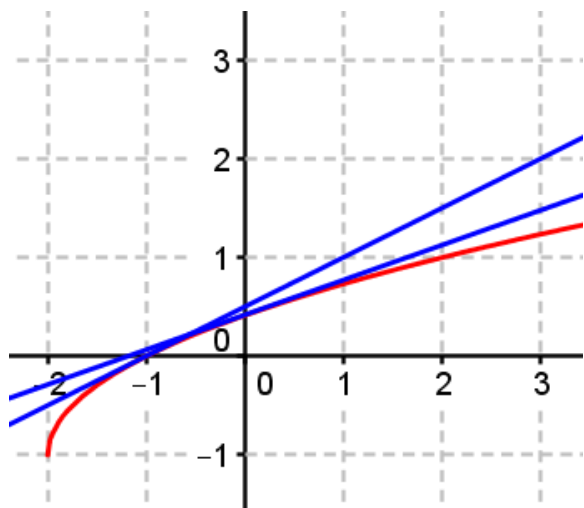
→ on obtient le point **B(0 ;  $\sqrt{2}-1$ )**

d. Les coefficients directeurs des tangentes aux points d'intersection avec les axes sont respectivement :

$$f'(-1) = \frac{1}{2} \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

e. Tangentes :  $y = 0,5x + 0,5$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \sqrt{2}-1$$

**EXERCICE 5D.7**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-3 ; 4]$  par :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$$

1. a.  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $[-3 ; 4]$ .

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 22x + 12$$

$$\begin{aligned} \text{b. } f'(3) &= 4 \times 3^3 - 6 \times 3^2 - 22 \times 3 + 12 \\ &= 108 - 54 - 66 + 12 = 0 \end{aligned}$$

donc 3 est une racine de  $f'(x)$ .

$$\text{c. } f'(x) = (x-3)(4x^2 + 6x - 4)$$

$$\text{d. } P(x) = 2(2x^2 + 3x - 2)$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 = 5^2$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{2 \times 2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+5}{2 \times 2} = 0,5$$

e. Ainsi  $P(x) \geq 0$  sur  $[-3 ; -2] \cup [0,5 ; 4]$ .  
et  $P(x) < 0$  sur  $]-2 ; 0,5[$

Or  $x-3 > 0$  sur  $[3 ; 4]$ .  
 $x-3 < 0$  sur  $[-3 ; 3]$ .

Donc  $f'(x) \geq 0$  sur  $[-2 ; 0,5] \cup [3 ; 4]$ .  
et  $f'(x) \leq 0$  sur  $[-3 ; -2] \cup [0,5 ; 3]$ .

2. Tableau de variation de  $f$  sur  $[-3 ; 4]$  :

$x$	-3	-2	0,5	3	4		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	-36	3,0625	-36	0		

c.

3. a.  $f(-3) = f(0) = f(1) = f(4) = 0$   
donc -3, 0 et 1 sont des racines de  $f(x)$ .

b.  $\mathcal{C}$  coupe 4 fois l'axe des abscisses.

c. Coefficients directeurs des tangentes  $(\mathcal{T}_A)$ ,  $(\mathcal{T}_B)$  et  $(\mathcal{T}_C)$  à la courbe  $\mathcal{C}$  aux points A, B et C d'abscisses respectives -3, 0 et 1 :

$$f'(-3) = (-3-3)(4(-3)^2 + 6 \times (-3) - 4) = -84$$

$$f'(0) = (0-3)(4 \times 0^2 + 6 \times 0 - 4) = 12$$

$$f'(1) = (1-3)(4 \times 1^2 + 6 \times 1 - 4) = -12$$

4. Tangentes  $(\mathcal{T}_A) : y = -84x - 252$

$$(\mathcal{T}_B) : y = 12x$$

$$(\mathcal{T}_C) : y = -12x + 12$$

