La Merci
MONTPELLIER

Exercices techniques

Exercice 7A.1

Résoudre l'équation : $2^{2x+1}+2^{x+3}-10=0$.

Exercice 7A.2

Résoudre l'équation : $2x^3+x^2-13x+6=0$.

Exercice 7A.3

Résoudre l'équation : $x^4-4x^3-7x^2+10x=0$.

Exercice 7A.4 (pour entrer en prépa Louis Le Grand)

Déterminer les nombres réels m tels que, pour tout réel x, on ait :

$$(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6\leq 0 \quad (\rightarrow \text{terminale})$$

Exercice 7A.1

Résoudre l'équation : $2^{2x+1}+2^{x+3}-10=0$.

$$2^{2x+1}+2^{x+3}-10=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2\times 2^{2x}+2\times 2^{x+2}-2\times 5=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2\times\left(2^{2x}+2^{x+2}-5\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{2x}+2^{x+2}-5=0$$
$$\Leftrightarrow\ \left(2^{x}\right)^2+2^2\times 2^x-5=0$$
$$\Leftrightarrow\ \left(2^{x}\right)^2+4\times 2^x-5=0$$

On pose : $X=2^x$, on obtient :

$$X^2+4X-5=0$$

Discriminant : $\Delta=4^2-4\times1\times(-5)=16+20=36=6^2$: $\Delta>0$ d'où deux solutions :

$$X_1=\frac{-4-6}{2\times1}=\frac{-10}{2}=-5 \quad\text{et}\quad X_2=\frac{-4+6}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$$

Or $X=2^x$ donc X est positif, ce qui exclue la solution X_1.

La relation : $2^x=X_2$ donne :

$$2^x=1\ \Leftrightarrow\ 2^x=2^0\ \Leftrightarrow\ x=0.$$

Vérification :

$$2^{2\times0+1}+2^{0+3}-10=2+8-10=0.$$

Certes la solution était intuitive, mais nous avons démontré qu'il n'existe pas d'autre solution réelle.

Exercice 7A.2

Résoudre l'équation : $2x^3+x^2-13x+6=0$.

$$2x^3+x^2-13x+6=0$$

On recherche une solution évidente :

- La valeur 1 ne marche pas
- Pour la valeur 2 : $2\times2^3+2^2-13\times2+6=2\times8+4-26+6=16+4-26+6=0$

2 est une racine de ce polynôme donc ce polynôme est divisible par $(x-2)$: **trois méthodes** :

Méthode 1 : $2x^3+x^2-13x+6=(x-2)\left(ax^2+bx+c\right)$

$$\Leftrightarrow\ 2x^3+x^2-13x+6=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$$
$$\Leftrightarrow\ 2x^3+x^2-13x+6=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}a=2\\ b-2a=1\\ c-2b=-13\\ -2c=6\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}a=2\\ b=1+2a=1+4=5\\ c=-13+2b=-13+10=-3\\ c=\dfrac{6}{-2}=-3\end{cases}$$

Ainsi : $2x^3+x^2-13x+6=(x-2)\left(2x^2+5x-3\right)$

Méthode 2 : Approche intuitive : on complète la parenthèse recherchée en équilibrant les écritures :

$$2x^3+x^2-13x+6=(x-2)\left(2x^2+....x+....\right)$$
$$=(x-2)\left(2x^2+5x+....\right)$$
$$=(x-2)\left(2x^2+5x-3\right)$$

Méthode 3 : Division de polynômes :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2-13x+6 & x-2 \\ \underline{-2x^3+4x^2} & \overline{2x^2+5x-3} \\ 5x^2-13x & \\ \underline{-5x^2+10x} & \\ -3x+6 & \\ \underline{3x-6} & \\ 0 & \end{array}$$

Nous devons trouver les racines de $2x^2+5x-3$:

$$\Delta=5^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=7^2 \rightarrow \Delta>0 \text{ donc deux racines :}$$

$$x_1=\frac{-5-7}{2\times2}=\frac{-12}{4}=-3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-5+7}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Les solutions de l'équation $2x^3+x^2-13x+6=0$ sont :

$$S=\left\{-3;\frac{1}{2};2\right\}$$

Exercice 7A.3

Résoudre l'équation : $x^4-4x^3-7x^2+10x=0$.

On peut immédiatement factoriser par x, donc 0 est une première solution de cette équation :

$$\left(x^3-4x^2-7x+10\right)x=0.$$

On recherche une solution évidente :

Pour $x=1$: $1^3-4\times1^2-7\times1+10=1-4-7+10=0$.

1 est une racine de ce polynôme donc ce polynôme est divisible par $(x-1)$: **trois méthodes** :

Méthode 2 : Approche intuitive : on complète la parenthèse recherchée en équilibrant les écritures :

$$\begin{aligned} x^3-4x^2-7x+10 &= (x-1)\left(x^2+....x+....\right) \\ &= (x-1)\left(x^2-3x+....\right) \\ &= (x-1)\left(x^2-3x-10\right) \end{aligned}$$

Nous devons trouver les racines de $x^2-3x-10$:

$$\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-10)=9+40=49=7^2 \rightarrow \Delta>0 \text{ donc deux racines :}$$

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\times1}=\frac{3-7}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \quad \text{et} \quad x_1=\frac{-(-3)+7}{2\times1}=\frac{3+7}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Les solutions de l'équation $x^4-4x^3-7x^2+10x=0$ sont :

$$S=\{0;1;-2;5\}$$

Exercice 7A.4 **(pour entrer en prépa Louis Le Grand)**

Déterminer les nombres réels m *tels que, pour tout réel* x*, on ait :*

$$(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6\leq0 \quad (\rightarrow \textit{terminale})$$

Si $m=-1$, l'inéquation devient :

$$\begin{aligned} & -2(-1-1)x+3\times(-1)+6\leq0 \\ \Leftrightarrow\ & -2(-2)x-3+6\leq0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x+3\leq0 \\ \Leftrightarrow\ & 4x\leq-3 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad x \leq -\dfrac{3}{4}$

Si $m \neq -1$: Le polynôme du second degré sera toujours négatif si le discriminant $\Delta \leq 0$
Discriminant :

$$\Delta = \left[-2(m-1)\right]^2 - 4\times(m+1)(3m+6)$$
$$= 4(m-1)^2 - 4\times(m+1)(3m+6) \qquad \rightarrow \text{on peut factoriser par 4}$$
$$= 4\left[\left(m^2-2m+1\right)-\left(3m^2+6m+3m+6\right)\right]$$
$$= 4\left[m^2-2m+1-3m^2-6m-3m-6\right]$$
$$= 4\left(-2m^2-11m-5\right)$$

Pour étudier le signe de Δ, nous devons calculer un nouveau discriminant sur l'expression obtenue de variable m :

$$\delta = (-11)^2 - 4\times(-2)(-5) = 121-40 = 81 = 9^2 \rightarrow \delta > 0 \text{ donc deux racines :}$$
$$m_1 = \frac{-(-11)-9}{2\times(-2)} = \frac{11-9}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-(-11)+9}{2\times(-2)} = \frac{11+9}{-4} = \frac{20}{-4} = -5$$

$a=-2$ donc la parabole est « orientée vers le bas » :

Si $m \in \left]-\infty;-5\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$: $\Delta < 0$:

Le polynôme $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6$ n'admet pas de racines,

→il est toujours du signe de $a=m+1$:

Si $m \in \left]-\infty;-5\right[$: $a=m+1$ donc $a<0$ et $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6<0$

Si $m \in \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$: $a=m+1$ donc $a>0$ et $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6>0$

Si $m \in \left\{-5;-\dfrac{1}{2}\right\}$: $\Delta = 0$:

Le polynôme $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6$ admet une racine :

$$x_0 = \frac{-\left[-2(m-1)\right]}{2\times(m+1)} = \frac{2(m-1)}{2(m+1)} = \frac{m-1}{m+1}$$

→il est toujours du signe de $a=m+1$:

Si $m=-5$: $a=m+1$ donc $a<0$ et $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6 \leq 0$

Si $m=-\dfrac{1}{2}$: $a=m+1$ donc $a>0$ et $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6 \geq 0$

Si $m \in \left]-5;-\dfrac{1}{2}\right[$: $\Delta > 0$ →le polynôme $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6 \leq 0$ ne sera pas toujours négatif

→ce qui suit n'est pas utile :

Le polynôme $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m+6$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-\left[-2(m-1)\right]-\sqrt{4\left(-2m^2-11m-5\right)}}{2\times(m+1)} = \frac{2(m-1)-2\sqrt{-2m^2-11m-5}}{2(m+1)} = \frac{m-1-\sqrt{-2m^2-11m-5}}{m+1}$$
$$x_2 = \frac{-\left[-2(m-1)\right]+\sqrt{4\left(-2m^2-11m-5\right)}}{2\times(m+1)} = \frac{2(m-1)+2\sqrt{-2m^2-11m-5}}{2(m+1)} = \frac{m-1+\sqrt{-2m^2-11m-5}}{m+1}$$

→ $a=m+1$ donc $a \geq 0 \Leftrightarrow m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

Si $m \in]-5;-1[$: $a = m+1$ donc $a < 0$: la parabole est « orientée vers le bas » :

$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m + 6 < 0$

Si $m \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$: $a = m+1$ donc $a > 0$ et $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m + 6 > 0$

Réponse :

Ainsi, les valeurs recherchées pour m sont :

$S =]-\infty;-5]$