Notre Dame de La Merci

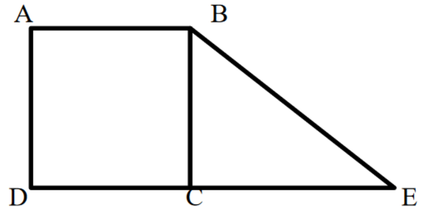
Problèmes sur le second degré

Exercice 1

Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noël.
Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes.
Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il ?

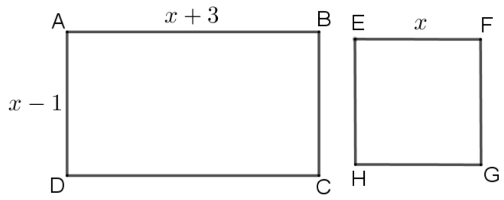
Exercice 2

On considère la figure ci-contre : ABCD est un carré de longueur de côté égal à x et BCE un triangle rectangle en C.
On donne $BC = x$ et $CE = 10\,\text{cm}$.
Calculer x pour que l'aire totale de la figure soit de 6 cm^2.



Exercice 3

Est-il possible de trouver une valeur pour x afin que l'aire du rectangle soit le double de celle du carré ?
Expliquer votre réponse au moyen de calculs.



Exercice 4

Un père a 25 ans de plus que son fils et le produit de leurs âges est de 116. Calculer les âges du père et du fils.

Exercice 5

Pour quelles valeurs de m, l'équation ci-dessous admet-elle une seule solution ?

$$mx^2 + 4x + 2(m-1) = 0$$

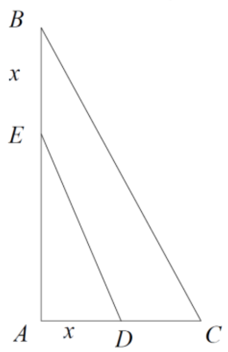
Exercice 5 bis

Déterminer, selon les valeurs de m, les solutions de l'équation :

$$mx^2 + 4x + 2(m-1) = 0$$

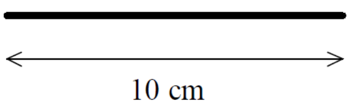
Exercice 6

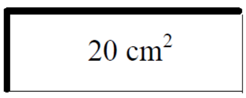
Dans un triangle ABC rectangle en A, on place les points D et E respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$ tels que $AD = BE = x$. (voir figure ci-contre).
Déterminer x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.
Données : AB = 18 m ; AC = 8 m.



Exercice 7

1. On dispose d'une baguette de bois de 10 cm de long. Où briser la baguette pour que les morceaux obtenus soient deux côtés consécutifs d'un rectangle de surface 20 cm^2 ?





2. Même question : où briser la baguette pour avoir un rectangle de 40 cm^2 ?

Exercice 8

Pour se rendre d'une ville A à une ville B distantes de 195 km, deux cyclistes partent en même temps.

L'un d'eux, dont la vitesse moyenne sur ce parcours est supérieure de 4 km/h à celle de l'autre, arrive 1 heure plus tôt. Quelles sont les vitesses des deux cyclistes ?

Exercice 9

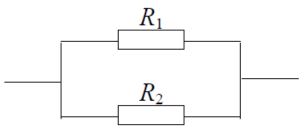
L'aire d'un triangle rectangle est 429 m^2, et l'hypoténuse a pour longueur 72,5 m. Trouver le périmètre.

Exercice 10

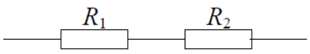
On achète pour 40 € d'essence à une station-service. On s'aperçoit qu'à une autre station le prix du litre d'essence est inférieur de 0,10 €. On aurait pu ainsi obtenir 5 litres de plus pour le même prix.
Quel était le prix de l'essence à la première station et combien de litres en avait-on pris ?

Exercice 11

Le montage en dérivation ci-contre a une résistance de 1,5 kΩ :



Le montage en série ci-dessous a une résistance de 8 kΩ :



Calculer les valeurs des résistances R_1 et R_2 .

Exercice 12

1. Résoudre l'équation $x^2 = 1 + x$. On notera Φ sa racine positive. (Φ s'appelle le « nombre d'or »).
2. Que vaut $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$? (Il y a une infinité de racines imbriquées).

Exercice 13

Résoudre l'équation : $\sqrt{x+2} = 3x - 2$

Exercice 14

Résoudre l'équation : $\sqrt{x+1} = 2x - 3$

Exercice 15

En l'absence de vent, un avion effectue la liaison entre deux villes A et B distantes de 308 km à la vitesse moyenne de 150 km/h. Ce jour-là, le vent a soufflé selon la direction (AB) à la même vitesse et dans le même sens pendant les trajets de l'aller et du retour.
Sachant que l'avion a mis une demi-heure de plus au retour qu'à l'aller, quelle était ce jour-là la vitesse du vent ?
Indication : Selon que le vent est favorable ou défavorable, sa vitesse s'ajoute ou se retranche à celle de l'avion en vol sans vent.

Exercice 16

Résoudre l'équation : $x^5 + x^4 + 1 = 0$

Exercice 17

Résoudre l'équation : $(3x+1)(7x+1) = 17$ sans utiliser le discriminant.

Exercice 18

On peut vérifier que : $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

a) Y a-t-il d'autres nombres vérifiant cette relation ?
b) Cette relation existe-t-elle avec des nombres pairs consécutifs ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1

Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noël.
Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes.
Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il ?

Soit x le nombre de personnes cherché.

Chaque personne a offert 3 cadeaux à chacune des $x-1$ personnes soit en tout : $3(x-1)$ cadeaux.

Le nombre total de cadeaux est :

$$x\times 3(x-1)=468 \Leftrightarrow 3x^2-3x-468=0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-3x-468}{3}=\frac{0}{3} \Leftrightarrow x^2-x-156=0$$

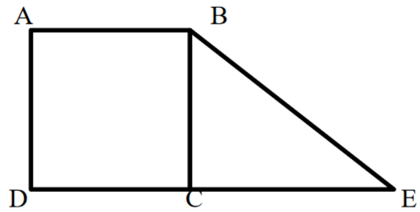
Discriminant : $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-156)=1+624=625=25^2$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-(-1)-\sqrt{625}}{2\times1}=\frac{1-25}{2}=\frac{-24}{2}=-12 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-1)+\sqrt{625}}{2\times1}=\frac{1+25}{2}=\frac{26}{2}=13.$$

Le nombre de personnes cherché ne pouvant être négatif, 13 personnes étaient présentes à cette fête.

Exercice 2

On considère la figure ci-contre : ABCD est un carré de longueur de côté égal à x et BCE un triangle rectangle en C.
On donne $BC=x$ et $CE=10\,cm$.
Calculer x pour que l'aire totale de la figure soit de 6 cm^2.



L'aire s'exprime ainsi : $x^2+\frac{x\times10}{2}=6 \Leftrightarrow x^2+5x-6=0$

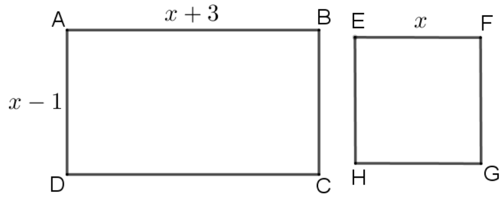
Discriminant : $\Delta=5^2-4\times1\times(-6)=25+24=49=7^2$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-5-\sqrt{49}}{2\times1}=\frac{-5-7}{2}=\frac{-12}{2}=-6 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-5+\sqrt{49}}{2\times1}=\frac{-5+7}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Une longueur ne pouvant être négative, la longueur cherché est égale à 1 cm.

Exercice 3

Est-il possible de trouver une valeur pour x afin que l'aire du rectangle soit le double de celle du carré ?
Expliquer votre réponse au moyen de calculs.



L'équation cherchée est :

$$(x+3)(x-1)=2\times x^2 \Leftrightarrow x^2-x+3x-3=2x^2 \Leftrightarrow x^2-x+3x-3-2x^2=0 \Leftrightarrow -x^2+2x-3=0$$

Discriminant : $\Delta=2^2-4\times(-1)\times(-3)=4-12=-8$: $\Delta<0$ donc il n'y a pas de solution.

Exercice 4

Un père a 25 ans de plus que son fils et le produit de leurs âges est de 116. Calculer les âges du père et du fils.

Soit x l'âge du père : son fils a $x-25$ ans.

Le produit de leurs âges vaut 116 :

$$x\times(x-25)=116 \Leftrightarrow x^2-25x-116=0$$

Discriminant : $\Delta=(-25)^2-4\times1\times(-116)=625+464=1089=33^2$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-(-25)-33}{2\times1}=\frac{25-33}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-25)+33}{2\times1}=\frac{25+33}{2}=\frac{58}{2}=29.$$

Un âge ne pouvant être négatif, le père a 29 ans et son fils a 4 ans.

Exercice 5

Pour quelles valeurs de m, l'équation ci-dessous admet-elle une seule solution ?

$$mx^2+4x+2(m-1)=0$$

Si $m=0$, l'équation devient :

$$4x-2=0 \Leftrightarrow 4x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$: il n'y a qu'une seule solution.

Si $m\neq 0$: discriminant : $\Delta=4^2-4\times m\times 2(m-1)=16-8m(m-1)=16-8m^2+8m=8(-m^2+m+2)$

L'équation étudiée n'admet qu'une seule solution si le discriminant est nul, soit :

$$-m^2+m+2=0$$

Discriminant : $\Delta'=1^2-4\times(-1)\times 2=1+8=9=3^2$: $\Delta'>0$ donc deux solutions :

$$m_1=\frac{-1-3}{2\times(-1)}=\frac{-4}{-2}=2 \quad \text{et} \quad m_2=\frac{-1+3}{2\times(-1)}=\frac{2}{-2}=-1.$$

$S=\{-1;0;2\}$

Exercice 5 bis

Déterminer, selon les valeurs de m, les solutions de l'équation : $mx^2+4x+2(m-1)=0$

Tout d'abord : si $m=0$: il s'agit d'une équation du premier degré :

$$0x^2+4x+2(0-1)=0 \Leftrightarrow 4x-2=0 \Leftrightarrow 4x=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$: une seule solution

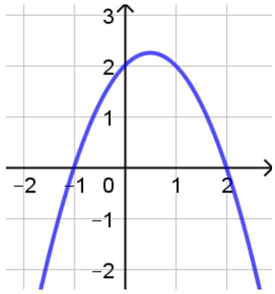
Si $m\neq 0$:

Discriminant : $\Delta=4^2-4\times m\times 2(m-1)=16-8m(m-1)=16-8m^2+8m=8(-m^2+m+2)$.

Etude du signe du discriminant :

$\Delta'=1^2-4\times(-1)\times 2=1+8=9=3^2$: $\Delta'>0$ donc deux solutions :

$$m_1=\frac{-1-3}{2\times(-1)}=\frac{-4}{-2}=2 \quad \text{et} \quad m_2=\frac{-1+3}{2\times(-1)}=\frac{2}{-2}=-1.$$



Or $a=-1$: la parabole représentant le polynôme $-m^2+m+2$ est orientée vers le bas, donc :

Si $m\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$: $\Delta<0$

→l'équation $mx^2+4x+2(m-1)=0$ n'admet pas de solution

Si $m\in\left]-1;0\right[\cup\left]0;2\right[$: $\Delta>0$

→l'équation $mx^2+4x+2(m-1)=0$ admet deux solutions :

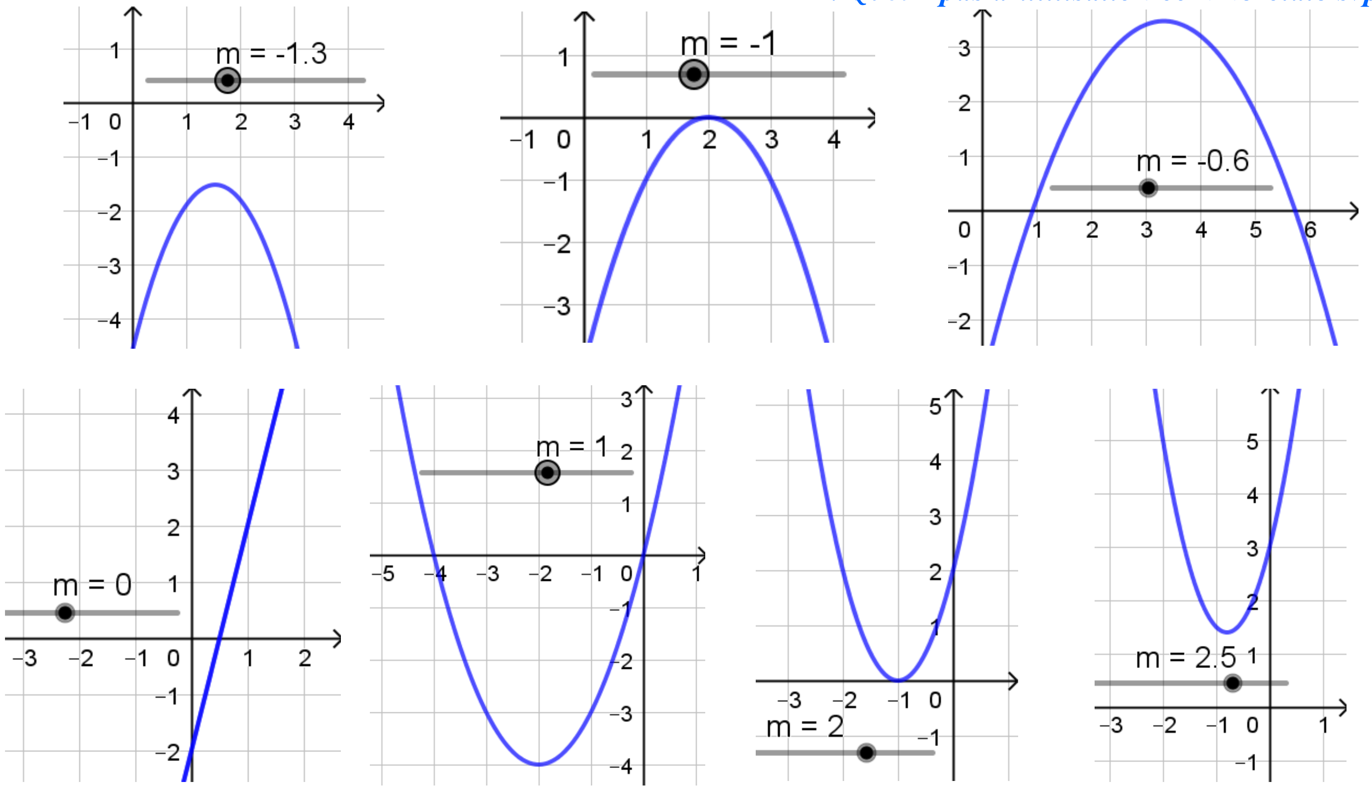
$$x_1=\frac{-4-\sqrt{8(-m^2+m+2)}}{2\times m}=\frac{-2\times 2-\sqrt{4}\sqrt{2(-m^2+m+2)}}{2\times m}=\frac{-2-\sqrt{2(-m^2+m+2)}}{m}$$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{8(-m^2+m+2)}}{2\times m}=\frac{-2\times 2+\sqrt{4}\sqrt{2(-m^2+m+2)}}{2\times m}=\frac{-2+\sqrt{2(-m^2+m+2)}}{m}$$

Si $m\in\{-1;2\}$: $\Delta=0$

→l'équation $mx^2+4x+2(m-1)=0$ admet une unique solution :

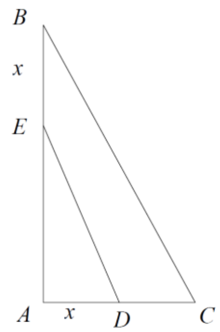
$$x_0=\frac{-4}{2\times m}=\frac{-2}{m}$$



Exercice 6

Dans un triangle ABC rectangle en A, on place les points D et E respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$ tels que $AD = BE = x$. (voir figure ci-contre).

Déterminer x pour que l’aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.
Données : AB = 18 m ; AC = 8 m.



$D \in [AC]$ donc $0 \le x \le 8$

$$\frac{AB \times AC}{2} = 2 \times \frac{AD \times AE}{2} \Leftrightarrow \frac{18 \times 8}{2} = 2 \times \frac{x \times (18 - x)}{2} \Leftrightarrow 72 = 18x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 18x + 72 = 0$$

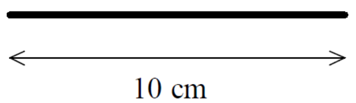
Discriminant : $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 72 = 324 - 288 = 36 = 6^2$: $\Delta > 0$ donc deux solutions :

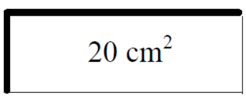
$$x_1 = \frac{-(-18) - 6}{2 \times 1} = \frac{18 - 6}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ et } x_2 = \frac{-(-18) + 6}{2 \times 1} = \frac{18 + 6}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Or $0 \le x \le 8$, on ne peut conserver le deuxième résultat.
La valeur cherchée est $x = 6$ m.

Exercice 7

1. *On dispose d’une baguette de bois de 10 cm de long. Où briser la baguette pour que les morceaux obtenus soient deux côtés consécutifs d’un rectangle de surface 20* cm^2 *?*





2. *Même question : où briser la baguette pour avoir un rectangle de 40* cm^2 *?*

1. Soit L et l les dimensions du rectangle :

$$\begin{cases} L + l = 10 \\ L \times l = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 10 - L \\ L \times (10 - L) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 10 - L \\ 10L - L^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 10 - L \\ -L^2 + 10L - 20 = 0 \end{cases}$$

Discriminant : $\Delta = 10^2 - 4\times(-1)\times(-20) = 100-80 = 20$: $\Delta > 0$ donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{-10-\sqrt{20}}{2\times(-1)} = \frac{-10-2\sqrt{5}}{-2} = 5+\sqrt{5} \text{ et } L_2 = \frac{-10-\sqrt{20}}{2\times(-1)} = \frac{-10+2\sqrt{5}}{-2} = 5-\sqrt{5}.$$

Une longueur ne peut être négative, donc :

soit $L = 5+\sqrt{5}$ cm et $l = 10-L = 10-\left(5+\sqrt{5}\right) = 5-\sqrt{5}$ cm.

soit $L = 5-\sqrt{5}$ cm et $l = 10-L = 10-\left(5-\sqrt{5}\right) = 5+\sqrt{5}$ cm.

Vérification : $L+l = 5+\sqrt{5}+5-\sqrt{5} = 10$

$L\times l = \left(5+\sqrt{5}\right)\times\left(5-\sqrt{5}\right) = 25+5\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5 = 20$.

2. Si l'on souhaite obtenir un rectangle de 40 cm^2 :

$$\begin{cases} L+l=10 \\ L\times l = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l=10-L \\ L\times(10-L) = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l=10-L \\ 10L-L^2 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l=10-L \\ -L^2+10L-40 = 0 \end{cases}$$

Discriminant : $\Delta = 10^2 - 4\times(-1)\times(-40) = 100-160 = -60$:

$\Delta < 0$: il n'y a pas de solution.

Exercice 8

Pour se rendre d'une ville A à une ville B distantes de 195 km, deux cyclistes partent en même temps. L'un d'eux, dont la vitesse moyenne sur ce parcours est supérieure de 4 km/h à celle de l'autre, arrive 1 heure plus tôt. Quelles sont les vitesses des deux cyclistes ?

Les formules sont : $V = \frac{d}{t} \Leftrightarrow V\times t = d \Leftrightarrow t = \frac{d}{V}$ avec $d = 195$ km.

Soit V la vitesse moyenne du cycliste le plus rapide et T son temps de parcours : $\mathrm{T} = \frac{195}{\mathrm{V}}$

→la vitesse moyenne du cycliste le moins rapide est $\mathrm{V}-4$

→son temps de parcours est égal à $\mathrm{T}+1$ et il est aussi égal à $\frac{195}{\mathrm{V}-4}$.

Ainsi :

$$\mathrm{T}+1 = \frac{195}{\mathrm{V}-4} \Leftrightarrow \frac{195}{\mathrm{V}}+1 = \frac{195}{\mathrm{V}-4} \Leftrightarrow \frac{195}{\mathrm{V}}+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}} = \frac{195}{\mathrm{V}-4} \Leftrightarrow \frac{195+\mathrm{V}}{\mathrm{V}} = \frac{195}{\mathrm{V}-4}$$

$$\Leftrightarrow (195+\mathrm{V})(\mathrm{V}-4) = 195\mathrm{V} \Leftrightarrow 195\mathrm{V}-780+\mathrm{V}^2-4\mathrm{V} = 195\mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}^2-4\mathrm{V}-780 = 0$$

Discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times(-780) = 16+3120 = 3136 = 56^2$: $\Delta > 0$ donc deux solutions :

$$\mathrm{V}_1 = \frac{-(-4)-56}{2\times1} = \frac{4-56}{2} = \frac{-52}{2} = -26 \text{ et } \mathrm{V}_2 = \frac{-(-4)+56}{2\times1} = \frac{4+56}{2} = \frac{60}{2} = 30.$$

Une vitesse ne pouvant être négative, la vitesse du cycliste le plus rapide est égale à 30 km/h et celle de son collègue est de 26 km/h.

Vérification : $\frac{195}{30} = 6{,}5$ soit 6h 30 min et $\frac{195}{26} = 7{,}5$ soit 7h 30 min.

Exercice 9

L'aire d'un triangle rectangle est 429 m^2*, et l'hypoténuse a pour longueur 72,5 m. Trouver le périmètre.*

Soit L et ℓ les longueurs des côtés adjacents à l'angle droit.

Les données de l'énoncé et le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle donnent le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{L\times \ell}{2}=429 \\ L^2+\ell^2=72,5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell=\dfrac{858}{L} \\ L^2+\left(\dfrac{858}{L}\right)^2=5256,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell=\dfrac{858}{L} \\ L^2+\dfrac{736\,164}{L^2}-5256,25=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell=\dfrac{429}{L} \\ L^4-5256,25L^2+736\,164=0 \end{cases}$$ →on pose $X=L^2$, l'équation devient :

$$X^2-5256,25X+736\,164=0$$

Discriminant : $\Delta=(-5256,25)^2-4\times1\times736\,164=24\,683\,508,06=4968,25^2$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$X_1=\frac{-(-5256,25)-4968,25}{2\times1}=\frac{5256,25-4968,25}{2}=\frac{288}{2}=144$$

et $$X_2=\frac{-(-5256,25)+4968,25}{2\times1}=\frac{5256,25+4968,25}{2}=\frac{10\,224,5}{2}=5112,25.$$

Or $X=L^2$ donc $L=\sqrt{X}$

Si $X_1=144$ alors $L_1=\sqrt{X_1}=\sqrt{144}=12\text{ m}$ et $\ell_1=\dfrac{858}{L_1}=\dfrac{858}{12}=71,5\text{ m}$.

Si $X_2=5112,25$ alors $L_2=\sqrt{X_2}=\sqrt{5112,25}=71,5\text{ m}$ et $\ell_2=\dfrac{858}{L_2}=\dfrac{858}{71,5}=12\text{ m}$.

Exercice 10

On achète pour 40 € d'essence à une station-service. On s'aperçoit qu'à une autre station le prix du litre d'essence est inférieur de 0,10 €. On aurait pu ainsi obtenir 5 litres de plus pour le même prix.
Quel était le prix de l'essence à la première station et combien de litres en avait-on pris ?

Soit P le prix payé à la première station-service et L le nombre de litres achetés.
La dépense est la même dans la deuxième station, d'où le système suivant :

$$\begin{cases} L\times P=40 \\ (L+5)(P-0,10)=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{40}{L} \\ (L+5)\left(\dfrac{40}{L}-0,10\right)=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{40}{L} \\ 40-0,10L+\dfrac{200}{L}-0,5=40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{40}{L} \\ -0,10L+\dfrac{200}{L}-0,5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{40}{L} \\ -0,10L^2+200-0,5L=0 \end{cases} \Big|\times(-10) \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{40}{L} \\ L^2+5L-2000=0 \end{cases}$$

Discriminant : $\Delta=5^2-4\times1\times(-2000)=25+8000=8025$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$L_1=\frac{-5-\sqrt{8025}}{2\times1}\simeq-47,29 \quad\text{et}\quad L_2=\frac{-5+\sqrt{8025}}{2\times1}\simeq42,29.$$

Le nombre de litres d'essence étant positif, on trouve $L\simeq42,29$

Donc $P=\dfrac{40}{L}=\dfrac{40}{42,29}\simeq0,95€$.

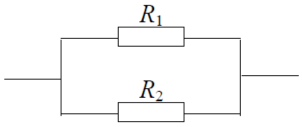
Vérification : $L\times P=42,29\times0,95\simeq40,1755\,€$

$(L+5)(P-0,10)=47,29\times0,85\simeq40,1965\,€$

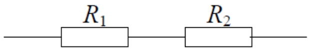
On avait acheté environ 42,29 litres à la première station au prix de 0,95 € le litre.

Exercice 11

Le montage en dérivation ci-contre a une résistance de 1,5 kΩ :



Le montage en série ci-dessous a une résistance de 8 kΩ :



Calculer les valeurs des résistances R_1 et R_2 .

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} R_1+R_2=8 \\ \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{1}{1{,}5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2=8-R_1 \\ \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{8-R_1}=\dfrac{1}{1{,}5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2=8-R_1 \\ \dfrac{1\times(8-R_1)}{R_1\times(8-R_1)}+\dfrac{1\times R_1}{(8-R_1)\times R_1}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_2=8-R_1 \\ \dfrac{8-R_1}{R_1(8-R_1)}+\dfrac{R_1}{(8-R_1)R_1}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2=8-R_1 \\ \dfrac{8}{R_1(8-R_1)}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2=8-R_1 \\ R_1(8-R_1)\times 2=8\times 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_2=8-R_1 \\ 8R_1-R_1^{\,2}=\dfrac{24}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_2=8-R_1 \\ -R_1^{\,2}+8R_1-12=0 \end{cases}$$

Discriminant : $\Delta=8^2-4\times(-1)\times(-12)=64-48=16=4^2$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$R_{1,1}=\frac{-8-4}{2\times(-1)}=\frac{-12}{-2}=6 \quad \text{et} \quad R_{1,2}=\frac{-8+4}{2\times(-1)}=\frac{-4}{-2}=2.$$

Si $R_1=6$ kΩ alors $R_2=8-R_1=8-6=2$ kΩ

Si $R_1=2$ kΩ alors $R_2=8-R_1=8-2=6$ kΩ

Exercice 12

1. *Résoudre l'équation* $x^2=1+x$. *On notera* Φ *sa racine positive. (*Φ *s'appelle le « nombre d'or »).*
2. *Que vaut* $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$ *? (Il y a une infinité de racines imbriquées).*

1. $x^2=1+x \Leftrightarrow x^2-x-1=0$

Discriminant : $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-1)=1+4=5$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \Phi=x_2=\frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. Soit une suite numérique (u_n) définie par $u_0=\sqrt{1}$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$

Tous les termes de cette suite sont positifs.

Ainsi : $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n} \Leftrightarrow u_{n+1}^{\;2}=1+u_n \Leftrightarrow u_{n+1}^{\;2}-u_n-1=0$

La quantité $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$ possède une valeur même non connue mais cette quantité existe ce qui présume que la suite (u_n) possède une limite L vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=L.$$

On obtient l'équation : $L^2-L-1=0$ dont nous savons que la solution positive est le « nombre d'or ».

Exercice 13

Résoudre l'équation : $\sqrt{x+2}=3x-2$

Domaine d'existence des solutions

Il faut que le contenu de la racine carrée soit positif : $x+2\geq0 \Leftrightarrow x\geq-2$.

Le membre de droite est égal à une racine carrée donc il est positif :

$$3x-2\geq 0 \iff 3x\geq 2 \iff x\geq \frac{2}{3}.$$

En recoupant ces deux informations, l'ensemble des solutions doit vérifier : $x\geq \frac{2}{3}$.

Résolution : $\sqrt{x+2}=3x-2 \iff \left(\sqrt{x+2}\right)^2=(3x-2)^2 \iff x+2=9x^2-12x+4 \iff 0=9x^2-13x+2$

Discriminant : $\Delta=(-13)^2-4\times 9\times 2=169-72=97$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-(-13)-\sqrt{97}}{2\times 9}=\frac{13-\sqrt{97}}{18}\simeq 0{,}175 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-13)+\sqrt{97}}{2\times 9}=\frac{13+\sqrt{97}}{18}\simeq 1{,}269.$$

Or $0{,}175<\frac{2}{3}$ et $1{,}269\geq\frac{2}{3}$: cette équation n'admet qu'une seule solution : $S=\left\{\frac{13+\sqrt{97}}{18}\right\}$

Exercice 14 *Résoudre l'équation :* $\sqrt{x+1}=2x-3$

Il faut que le contenu de la racine carrée soit positif : $x+1\geq 0 \iff x\geq -1$.

Le membre de droite est égal à une racine carrée donc il est positif :

$$2x-3\geq 0 \iff 2x\geq 3 \iff x\geq \frac{3}{2}.$$

En recoupant ces deux informations, l'ensemble des solutions doit vérifier : $x\geq \frac{3}{2}$.

Résolution : $\sqrt{x+1}=2x-3 \iff \left(\sqrt{x+1}\right)^2=(2x-3)^2 \iff x+1=4x^2-12x+9 \iff 0=4x^2-13x+8$

Discriminant : $\Delta=(-13)^2-4\times 4\times 8=169-128=41$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-(-13)-\sqrt{41}}{2\times 4}=\frac{13-\sqrt{41}}{8}\simeq 0{,}825 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-13)+\sqrt{41}}{2\times 4}=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\simeq 2{,}425.$$

Or $0{,}825<\frac{3}{2}$ et $2{,}425\geq\frac{3}{2}$: cette équation n'admet qu'une seule solution : $S=\left\{\frac{13+\sqrt{41}}{8}\right\}$.

Exercice 15

En l'absence de vent, un avion effectue la liaison entre deux villes A et B distantes de 308 km à la vitesse moyenne de 150 km/h. Ce jour-là, le vent a soufflé selon la direction (AB) à la même vitesse et dans le même sens pendant les trajets de l'aller et du retour.

Sachant que l'avion a mis une demi-heure de plus au retour qu'à l'aller, quelle était ce jour-là la vitesse du vent ?

Indication : *Selon que le vent est favorable ou défavorable, sa vitesse s'ajoute ou se retranche à celle de l'avion en vol sans vent.*

Soit V la vitesse du vent recherchée.

La formule $v=\frac{d}{t}$ donne : $v\times t=d$, soit : $t=\frac{d}{v}$.

La vitesse à l'aller, vent de dos, est égale à $150+\mathrm{V}$ km/h, au retour, vent de face, elle vaut $150-\mathrm{V}$ km/h.

Le temps mis à l'aller est égal à :

$$t_A=\frac{308}{150+\mathrm{V}}$$

Et le temps mis au retour est égal à :

$$t_R=\frac{308}{150-\mathrm{V}}.$$

L'avion a mis une demi-heure de plus au retour qu'à l'aller, ce qui s'écrit ainsi :

$$t_R = t_A + 0,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{308}{150-V} = \frac{308}{150+V} + 0,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{308}{150-V} \times \frac{150+V}{150+V} = \frac{308}{150+V} \times \frac{150-V}{150-V} + 0,5 \times \frac{(150-V)(150+V)}{(150-V)(150+V)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{46\,200+308V}{(150-V)(150+V)} = \frac{46\,200-308V}{(150-V)(150+V)} + \frac{0,5\left(150^2-V^2\right)}{(150-V)(150+V)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(46\,200+308V)-(46\,200-308V)-\left(11250-0,5V^2\right)}{(150-V)(150+V)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 46\,200+308V-46\,200+308V-11250+0,5V^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,5V^2+616V-11250 = 0$$

$$\Leftrightarrow V^2+1232V-22\,500 = 0$$

Discriminant :

$$\Delta = 1232^2 - 4\times1\times(-22\,500) = 1607\,824 = 1268^2$$

$\Delta > 0$ donc deux racines :

$$V_1 = \frac{-1232-1268}{2\times1} = \frac{-2\,500}{2} = -1250 \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{-1232+1268}{2\times1} = \frac{36}{2} = 18.$$

La vitesse étant considérée comme une grandeur positive, on ne retient que la première solution

→la vitesse du vent ce jour-là était égale à 18 km/h.

Exercice 16

Résoudre l'équation : $x^5+x^4+1=0$

$$x^5+x^4+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^5+x^4+x^3+x^2+x+1-x^3-x^2-x=0$$

$$\Leftrightarrow x^3\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)-x\left(x^2+x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right)=0$$

Culture générale : les solutions des équations de la forme $x^3+px+q=0$ sont :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

On obtient, avec $p=-1$ et $q=1$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{27}}} \simeq -1,3247$$

Exercice 17

Résoudre l'équation : $(3x+1)(7x+1)=17$ sans utiliser le discriminant.

$$(3x+1)(7x+1)=17$$

$$\Leftrightarrow (3x+1)\times7(7x+1)\times3=17\times21$$

$$\Leftrightarrow (21x+7)(21x+3)=17\times21$$

$$\Leftrightarrow (21x+5+2)(21x+5-2)=(19-2)(19+2)$$

$\Leftrightarrow \ (21x+5)^2 - 2^2 = 19^2 - 2^2$

$\Leftrightarrow \ (21x+5)^2 = 19^2$

Soit : $21x+5=19 \Leftrightarrow 21x=14 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

Soit : $21x+5=-19 \Leftrightarrow 21x=-24 \Leftrightarrow x=-\dfrac{8}{7}$

Exercice 18

On peut vérifier que : $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$.

a) *Y a-t-il d'autres nombres vérifiant cette relation ?*

Soit n le premier nombre cherché. On doit résoudre l'équation :

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=(n+3)^2+(n+4)^2$$

$$\Leftrightarrow \ n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4=n^2+6n+9+n^2+8n+16$$

$$\Leftrightarrow \ 3n^2+6n+5=2n^2+14n+25$$

$$\Leftrightarrow \ 3n^2+6n+5-2n^2-14n-25=0$$

$$\Leftrightarrow \ n^2-8n-20=0$$

$\Delta=(-8)^2-4\times1\times(-20)=64+80=144=12^2$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$n_1=\frac{-(-8)-12}{2\times1}=\frac{-4}{2}=-2 \quad \text{et} \quad n_2=\frac{-(-8)+12}{2\times1}=\frac{20}{2}=10.$$

Les deux solutions sont :

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$

et : $(-2)^2+(-1)^2+0^2=1^2+2^2$.

b) *Cette relation existe-t-elle avec des nombres pairs consécutifs ?*

Soit n le premier nombre cherché. On doit résoudre l'équation :

$$n^2+(n+2)^2+(n+4)^2=(n+6)^2+(n+8)^2$$

$$\Leftrightarrow \ n^2+n^2+4n+4+n^2+8n+16=n^2+12n+36+n^2+16n+64$$

$$\Leftrightarrow \ 3n^2+12n+20=2n^2+28n+100$$

$$\Leftrightarrow \ 3n^2+12n+20-2n^2-28n-100=0$$

$$\Leftrightarrow \ n^2-16n-80=0$$

$\Delta=(-16)^2-4\times1\times(-80)=256+320=576=24^2$: $\Delta>0$ donc deux solutions :

$$n_1=\frac{-(-16)-24}{2\times1}=\frac{-8}{2}=-4 \quad \text{et} \quad n_2=\frac{-(-16)+24}{2\times1}=\frac{40}{2}=20.$$

Les deux solutions sont :

$$20^2+22^2+24^2=26^2+28^2$$

et : $(-4)^2+(-2)^2+0^2=2^2+4^2$.