Notre Dame de La Merci

Problèmes sur la dérivation

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -16x^3 + 12x^2 - x + 14$$

On note C la courbe représentative de f, la tangente T_a à C en a et d la droite d'équation $y = -x - 4$. Pour quelle(s) valeur(s) de a la droite d est-elle parallèle à T_a ?

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 14$

On note C_f la courbe représentative de *f*, T_a la tangente à C_f en a et d la droite d'équation $y = -x - 4$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a la droite T_a est-elle parallèle à d ?

Exercice 3

Déterminer l'équation d'une droite qui est à la fois tangente à la parabole $y = x^2$ et à l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -16x^3 + 12x^2 - x + 14$

On note C_f la courbe représentative de f, T_a la tangente à C_f en a et d la droite d'équation $y = -x - 4$.

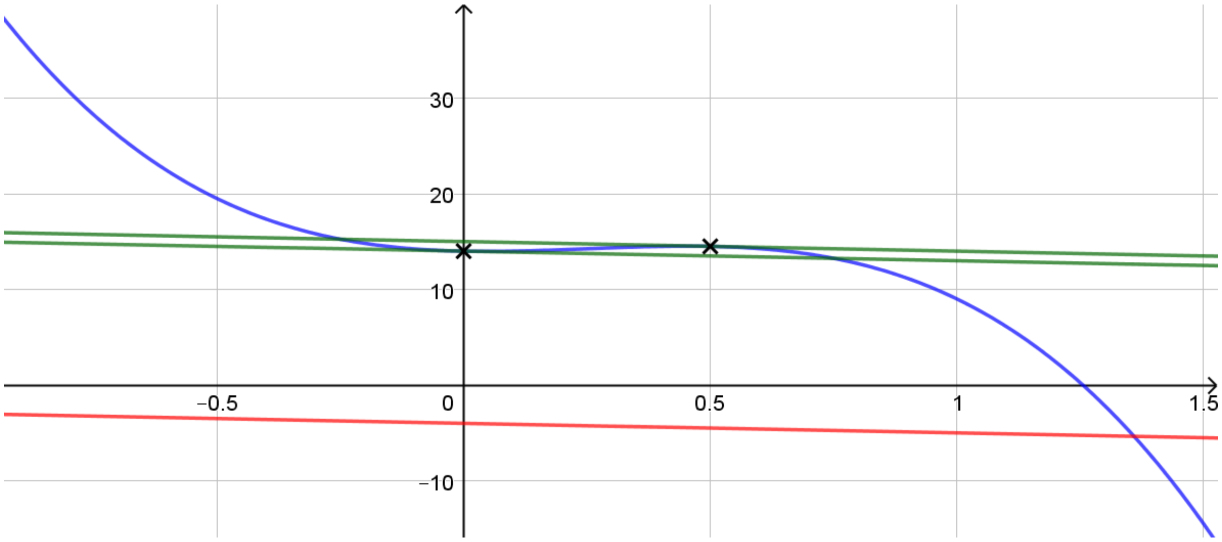
Pour quelle(s) valeur(s) de a la droite T_a est-elle parallèle à d ?

Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur et la dérivée est égale à la pente de la tangente en un point. On doit résoudre l'équation :

$$f'(x) = -1 \quad \text{avec} \quad f'(x) = -48x^2 + 24x - 1$$

Ainsi : $-48x^2 + 24x - 1 = -1 \Leftrightarrow -48x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow 24x(-2x+1) = 0$

Soit $x = 0$, soit $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$



Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 14$

On note C_f la courbe représentative de f, T_a la tangente à C_f en a et d la droite d'équation $y = -x - 4$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a la droite T_a est-elle parallèle à d ?

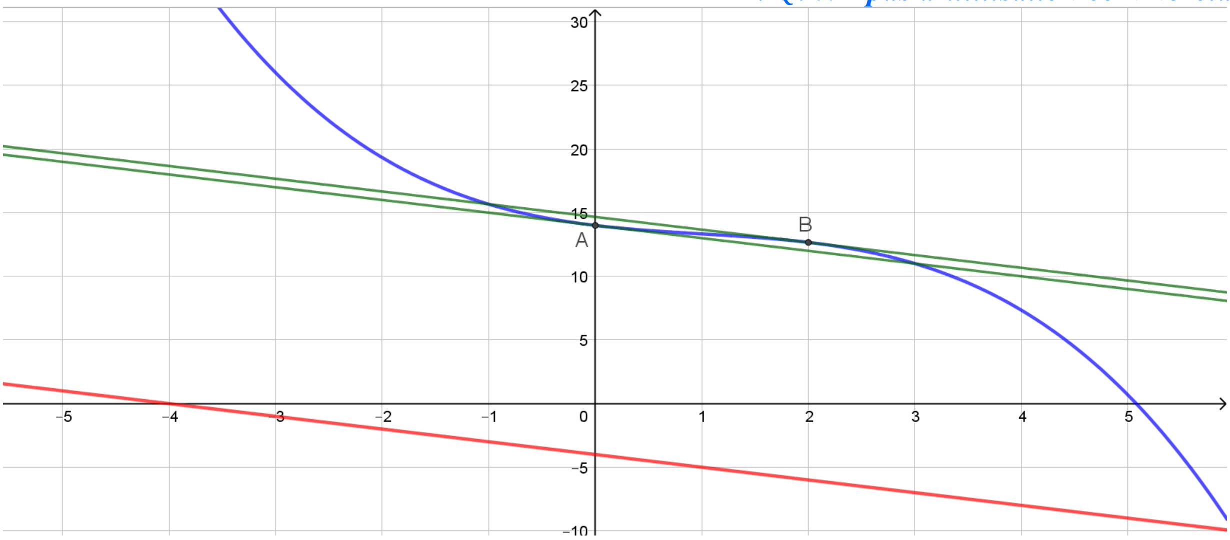
Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur et la dérivée est égale à la pente de la tangente en un point. On doit résoudre l'équation :

$$f'(x) = -1 \quad \text{avec} \quad f'(x) = -\frac{1}{6} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

Ainsi : $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = 0$

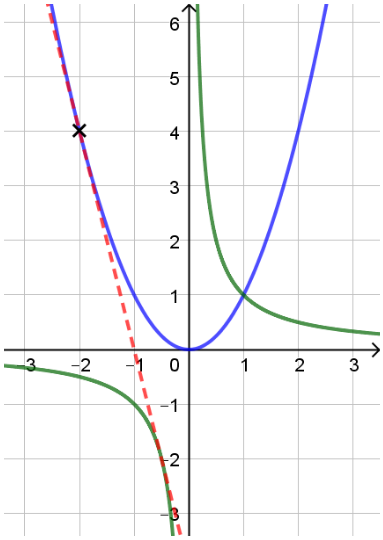
soit $x = 0$,

soit $-\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -1 \times \left(\frac{-2}{1}\right) = 2$



Exercice 3

Déterminer l'équation d'une droite qui est à la fois tangente à la parabole $y=x^2$ *et à l'hyperbole* $y=\dfrac{1}{x}$.



Un schéma avec geogebra permet de mieux comprendre l'énoncé.

On pose $f(x)=x^2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(x)=2x$ et $g'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$.

Les tangentes à la parabole $y=x^2$ en un point d'abscisse a sont de la forme :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$
$$=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$$

Les tangentes à l'hyperbole $y=\dfrac{1}{x}$ en un point d'abscisse b sont de la forme :

$$y=g'(b)(x-b)+g(b)$$
$$=\frac{-1}{b^2}(x-b)+\frac{1}{b}=-\frac{1}{b^2}x+\frac{2}{b}.$$

Si ces tangentes sont confondues, on doit avoir, pour tout réel x :

$$2ax-a^2=-\frac{1}{b^2}x+\frac{2}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=-\dfrac{1}{b^2} \\ -a^2=\dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2} \\ -\left(-\dfrac{1}{2b^2}\right)^2=\dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2} \\ -\dfrac{1}{4b^4}=\dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2} \\ -\dfrac{1}{4\times 2}=\dfrac{b^4}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2} \\ -\dfrac{1}{8}=b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=-\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}=-2 \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La tangente commune a pour expression :

En prenant $a=-2$: $y=2\times(-2)x-(-2)^2=-4x-4$

En prenant $b=-\dfrac{1}{2}$: $y=-\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}x+\dfrac{2}{-\dfrac{1}{2}}=-4x-4$