Notre Dame de La Merci

Exercices à prise d'initiative n°2 sur le second degré

Exercice 1 :

Résoudre l'équation :

$$\left(x^2-7x+11\right)^{x^2-13x+42}=1$$

Exercice 2 :

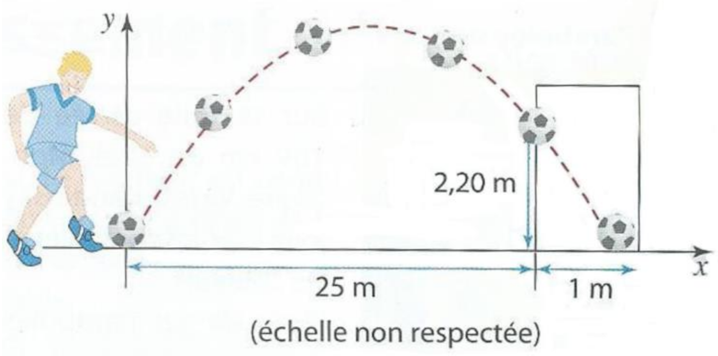
Résoudre l'équation :

$$\left(5-x\right)^{2x^2-7x+6}=1$$

Exercice 3

Un joueur situé à 25m du but adverse tente un tir et parvient à marquer. Son ballon a franchi la ligne de but à une hauteur de 2,20m passant ainsi tout près de la barre transversale, puis a ainsi atteint le sol à 1m derrière la ligne de but.

Sachant que la trajectoire du ballon est une parabole, quelle hauteur maximale le ballon a-t-il atteinte ?



CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

Résoudre l'équation : $\left(x^2-7x+11\right)^{x^2-13x+42}=1$

Il faut énumérer les différentes possibilités :

- Soit $x^2-7x+11=1$
- Soit $x^2-7x+11=-1$ et $x^2-13x+42$ est un entier pair
- Soit $x^2-13x+42=0$ avec $x^2-7x+11\neq 0$

1ère possibilité : $x^2-7x+11=1 \iff x^2-7x+10=0$

$\Delta=(-7)^2-4\times1\times10=49-40=9=3^2$ donc deux solutions :

$x_1=\dfrac{-(-7)-3}{2\times1}=\dfrac{7-3}{2}=2$ et $x_2=\dfrac{-(-7)+3}{2\times1}=\dfrac{7+3}{2}=5$ → $S_1=\{2;5\}$

2ème possibilité : $x^2-7x+11=-1 \iff x^2-7x+12=0$ et $x^2-13x+42$ est un entier pair

$x^2-7x+12=0$

$\Delta=(-7)^2-4\times1\times12=49-48=1=1^2$ donc deux solutions :

$x_3=\dfrac{-(-7)-1}{2\times1}=\dfrac{7-1}{2}=3$ et $x_4=\dfrac{-(-7)+1}{2\times1}=\dfrac{7+1}{2}=4$

Or $x_3{}^2-13x_3+42=3^2-13\times3+42=9-39+42=12$: un entier pair

Et $x_4{}^2-13x_4+42=4^2-13\times4+42=16-52+42=6$: un entier pair

→ $S_2=\{3;4\}$

3ème possibilité : $x^2-13x+42=0$ avec $x^2-7x+11\neq0$

$x^2-13x+42=0$

$\Delta=(-13)^2-4\times1\times42=169-168=1=1^2$ donc deux solutions :

$x_5=\dfrac{-(-13)-1}{2\times1}=\dfrac{13-1}{2}=6$ et $x_6=\dfrac{-(-13)+1}{2\times1}=\dfrac{13+1}{2}=7$

Or $x_5{}^2-7x_5+11=6^2-7\times6+11=36-42+11=17$: résultat non nul

Et $x_6{}^2-7x_6+11=7^2-7\times7+11=49-49+11=11$: résultat non nul

→ $S_3=\{6;7\}$

Les solutions de l'équation $\left(x^2-7x+11\right)^{x^2-13x+42}=1$ sont : $S=\{2;3;4;5;6;7\}$

Exercice 2 :

Résoudre l'équation : $(5-x)^{2x^2-7x+6}=1$

Il faut énumérer les différentes possibilités :

- Soit $5-x=1$
- Soit $5-x=-1$ et $2x^2-7x+6$ est un entier pair
- Soit $2x^2-7x+6=0$ avec $5-x\neq0$

1ère possibilité : $5-x=1 \Leftrightarrow -x=1-5 \Leftrightarrow x=4 \rightarrow S_1=\{4\}$

2ème possibilité : $5-x=-1 \Leftrightarrow -x=-1-5 \Leftrightarrow x=6$

et $2\times 6^2-7\times 6+6=72-42+6=36$ est un entier pair

$\rightarrow S_2=\{6\}$

3ème possibilité : $2x^2-7x+6=0$ avec $5-x\neq 0$

$2x^2-7x+6=0$

$\Delta=(-7)^2-4\times 2\times 6=49-48=1=1^2$ donc deux solutions :

$x_3=\dfrac{-(-7)-1}{2\times 2}=\dfrac{7-1}{4}=\dfrac{3}{2}$ et $x_4=\dfrac{-(-7)+1}{2\times 2}=\dfrac{7+1}{4}=2$

Or $5-\dfrac{3}{2}=\dfrac{10}{2}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}\neq 0$: résultat non nul

Et $5-2=3\neq 0$: résultat non nul

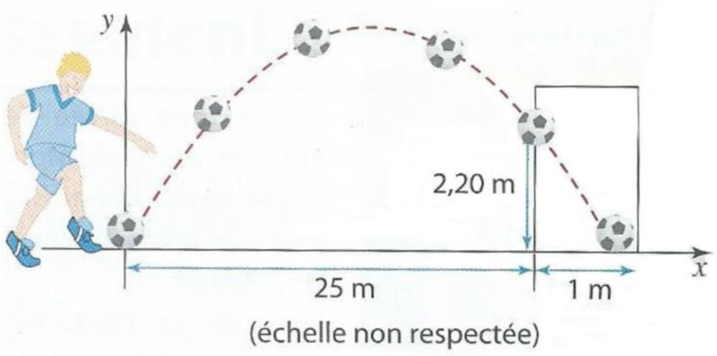
$\rightarrow S_3=\left\{\dfrac{3}{2};2\right\}$

Les solutions de l'équation $(5-x)^{2x^2-7x+6}=1$ sont : $S=\left\{\dfrac{3}{2};2;4;6\right\}$

Exercice 3

Un joueur situé à 25m du but adverse tente un tir et parvient à marquer. Son ballon a franchi la ligne de but à une hauteur de 2,20m passant ainsi tout près de la barre transversale, puis a ainsi atteint le sol à 1m derrière la ligne de but.

Sachant que la trajectoire du ballon est une parabole, quelle hauteur maximale le ballon a-t-il atteinte ?



La parabole décrit une fonction du second degré de la forme :

$f(x)=ax^2+bx+c$.

On définit un repère à l'emplacement initial du ballon, ainsi les données de l'énoncé se traduisent ainsi :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(25)=2,2 \\ f(26)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\times 0^2+b\times 0+c=0 \\ a\times 25^2+b\times 25+c=2,2 \\ a\times 26^2+b\times 26+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 625a+25b=2,2 \\ 26(26a+b)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 625a+25b=2,2 \\ 26a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 625a+25\times(-26a)=2,2 \\ b=-26a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 625a-650a=2,2 \\ b=-26a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ -25a=2,2 \\ b=-26a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-\dfrac{2,2}{25}=-0,088 \\ b=-26\times(-0,088)=2,288 \end{cases}$$

La fonction cherchée est :

$$f(x)=-0,088x^2+2,288x.$$

$a=-0,088$ donc la parabole est orientée vers le bas, son sommet a pour abscisse :

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-2,288}{2\times(-0,088)}=13.$$

La hauteur maximale atteinte par le ballon est :

$$f(13)=-0,088\times 13^2+2,288\times 13=14,872 \text{ mètres.}$$