Exercices à prise d'initiative sur les Probabilités conditionnelles

Exercice 1 :

On a volé la Joconde ! Deux ans plus tard, lors d'une perquisition, la police retrouve Mona Lisa. Mais le doute persiste quant à l'authenticité de la toile. On estime à 80 % la probabilité qu'il s'agisse de la véritable Joconde. On fait appel à deux experts. Le premier, qui se trompe une fois sur onze, déclare que le tableau est authentique. Le deuxième, qui se trompe une fois sur six, affirme que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes.

Quelle est la probabilité que la Joconde retrouvée soit authentique ?

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 2 :

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population dans la proportion d'une personne malade sur 10 000.

Le responsable d'un laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99 % et si elle ne l'est pas, le test est négatif à 98 %. Autorisiez-vous la commercialisation du test ?

Exercice 3 :

Dans un jeu télévisé, Lucas, un candidat, se trouve devant 3 portes fermées. Derrière l'une de ces portes, il y a une superbe voiture à gagner et rien derrière les deux autres.

Lucas choisit une porte au hasard (sans l'ouvrir...). L'animateur ouvre à son tour une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle dissimulant la voiture (seul l'animateur sait où est la voiture).

Que doit faire le candidat : maintenir son choix ou changer de porte ?

Exercice 4 : Problème d'un juge et des taxis

Un juge au tribunal doit juger de la culpabilité d'une compagnie de taxis bleus. Un soir de brouillard, un taxi a percuté un piéton qui traversait la rue dans son bon droit puis a pris la fuite. Un témoin affirme que le taxi était bleu et c'est sur la base de ce témoignage que le procès a été instruit. Or dans la ville, deux compagnies se partagent le marché : "les taxis bleus" et les "les taxis verts". La compagnie les taxis verts possède 90 % de part de marché. On demande au témoin d'effectuer des tests de reconnaissance de couleurs pour mesurer la fiabilité de son témoignage. Il s'avère qu'il est fiable dans 90 % des cas pour la couleur bleue et 80 % des cas pour la couleur verte. Le juge doit-il condamner la compagnie des taxis bleus?

Exercice 5 :

Un commerçant met en vente 50 tickets d'un certain jeu dont exactement 3 sont gagnants. Je lui achète 6 tickets. Avec quelle probabilité en ai-je acheté au moins un gagnant ?

Exercice 6 :

Un jeu de 32 cartes a été malicieusement truqué, on y a remplacé une carte autre que l'as de pique par un deuxième as de pique. On répète alors n fois avec remise l'expérience consistant à tirer simultanément 4 cartes. À partir de quelle valeur de n la probabilité de déceler la supercherie est-elle supérieure ou égale à 0,9 ?

Exercice 7 : Amérique du Nord juin 2017

Un entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam, Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam ».

Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés.

De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams.

Après installation du logiciel, il constate que 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam.

Pour un message pris au hasard, on considère les évènements suivants :

- D : « le message est déplacé »; • S : « le message est un spam ».

1) Calculer $p(S \cap D)$.
2) On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04.
3) On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 1 :

La probabilité cherchée est la probabilité que le tableau soit vrai sachant que le premier pense qu'il est vrai et que le deuxième pense qu'il est faux.

Il est indispensable de faire un arbre : le tableau est soit Vrai, soit Faux, puis chaque expert donne son point de vue.

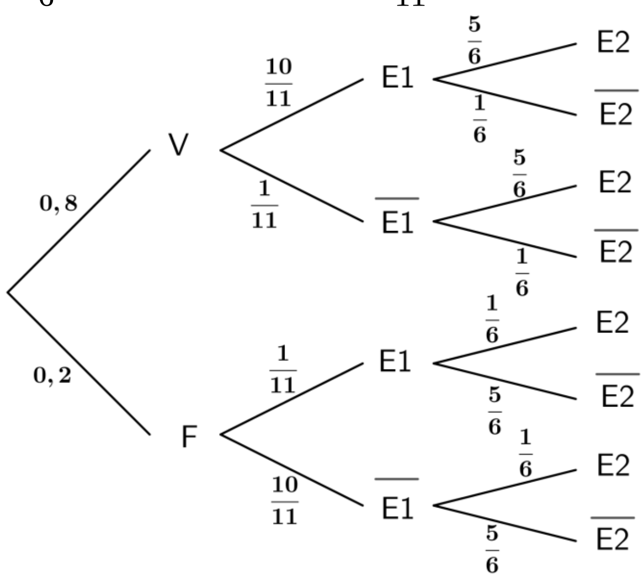
On considère les évènements V et F : « le tableau est vrai » , « le tableau est faux ».

Evènement E1 : « le premier expert pense qu'il est vrai » : $p_V(\mathrm{E1})=\dfrac{10}{11}$

Evènement E2 : « le deuxième expert pense qu'il est vrai» : $p_V\left(\overline{\mathrm{E2}}\right)=\dfrac{5}{6}$

Or les avis des experts sont indépendants :

$$p_{\mathrm{E1}}(\mathrm{E2})=p(\mathrm{E2})=\frac{5}{6} \quad \text{et} \quad p_{\mathrm{E2}}(\mathrm{E1})=p(\mathrm{E1})=\frac{10}{11}$$



Petit complément pour mieux comprendre :

Pour la première branche $\left(\mathrm{V}\cap\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2\right)$:

le tableau est vrai et les deux experts affirment qu'il est vrai

Pour la deuxième branche $\left(\mathrm{V}\cap\mathrm{E}_1\cap\overline{\mathrm{E}_2}\right)$:

le tableau est vrai, le premier expert affirme qu'il est vrai et le deuxième expert affirme qu'il est faux

Pour la cinquième branche $\left(\mathrm{F}\cap\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2\right)$:

le tableau est faux et les deux experts affirment qu'il est vrai

…

Pour simplifier l'étude, on pose l'évènement B : « le premier expert pense qu'il est vrai et le second pense qu'il est faux » :

$$\mathrm{B}=\mathrm{E1}\cap\overline{\mathrm{E2}}$$

→on peut maintenant écrire la probabilité que la Joconde retrouvée soit authentique : $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{V})$.

V et F forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{B})=p(\mathrm{V}\cap\mathrm{B})+p(\mathrm{F}\cap\mathrm{B})$$

Si le tableau est vrai : $p_V(\mathrm{B})=p_V\left(\mathrm{E1}\cap\overline{\mathrm{E2}}\right)=\dfrac{10}{11}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{33}$

Si le tableau est faux : $p_F(\mathrm{B})=p_F\left(\mathrm{E1}\cap\overline{\mathrm{E2}}\right)=\dfrac{1}{11}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{66}$

Ainsi : $p(\mathrm{B})=p(\mathrm{V})\times p_V(\mathrm{B})+p(\mathrm{F})\times p_F(\mathrm{B})=\dfrac{8}{10}\times\dfrac{5}{33}+\dfrac{2}{10}\times\dfrac{5}{66}=\dfrac{45}{330}=\dfrac{3}{22}$

D'après la loi des probabilités conditionnelles :

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{V})=\frac{p(\mathrm{B}\cap\mathrm{V})}{p(\mathrm{B})}=\frac{p(\mathrm{V})\times p_{\mathrm{V}}(\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=\frac{\frac{8}{10}\times\frac{5}{33}}{\frac{3}{22}}=\frac{\frac{4}{33}}{\frac{3}{22}}=\frac{4}{33}\times\frac{22}{3}=\frac{8}{9}$$

Il y a donc 8 chances sur 9 pour le tableau de la Joconde soit vrai.

Exercice 2 :

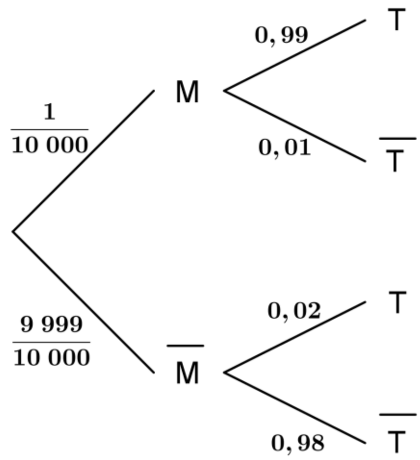
Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population dans la proportion d'une personne malade sur 10 000.

Le responsable d'un laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99 % et si elle ne l'est pas, le test est négatif à 98 %. Autorisiez-vous la commercialisation du test ?

Soit M et T les évènements « la personne est malade » et « le test est positif », on obtient l'arbre ci-contre :

On doit estimer la fiabilité du test et étudier les marges d'erreur, à savoir :

- parmi les personnes ayant un test positif, quel pourcentage de personnes malade : $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})$?
- parmi les personnes ayant un test négatif, quel pourcentage de personnes réellement malades : $p_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{M})$?



D'après la loi des probabilités conditionnelles : $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})=\dfrac{p(\mathrm{M}\cap\mathrm{T})}{p(\mathrm{T})}$

M et $\overline{\mathrm{M}}$ forment une partition de la population, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{T})=p(\mathrm{M}\cap\mathrm{T})+p(\overline{\mathrm{M}}\cap\mathrm{T})=p(\mathrm{M})\times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})+p(\overline{\mathrm{M}})\times p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T})=\frac{1}{10000}\times0,99+\frac{9999}{10000}\times0,02$$

$$=0,020097$$

Ainsi :

$$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})=\frac{p(\mathrm{M}\cap\mathrm{T})}{p(\mathrm{T})}=\frac{p(\mathrm{M})\times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})}{p(\mathrm{T})}=\frac{0,0001\times0,99}{0,020097}\simeq0,0049$$

Soit environ 0,5 %, ce qui signifie que sur 200 personnes ayant un test positif, une seule est réellement malade : **le test n'est pas fiable.**

D'après la loi des probabilités conditionnelles : $p_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{M})=\dfrac{p(\mathrm{M}\cap\overline{\mathrm{T}})}{p(\overline{\mathrm{T}})}$

M et $\overline{\mathrm{M}}$ forment une partition de la population, d'après la loi des probabilités totales :

$$p_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{M})=\frac{p(\mathrm{M}\cap\overline{\mathrm{T}})}{p(\overline{\mathrm{T}})}=\frac{p(\mathrm{M})\times p_{\mathrm{M}}(\overline{\mathrm{T}})}{p(\overline{\mathrm{T}})}=\frac{0,0001\times0,01}{1-0,020097}\simeq1,02\times10^{-6}$$

Très peu de malades auraient un test négatif.

Exercice 3 :

Soit les évènements :

S : « la porte mène à la voiture »

E_1 : « la porte mène à l'échec »

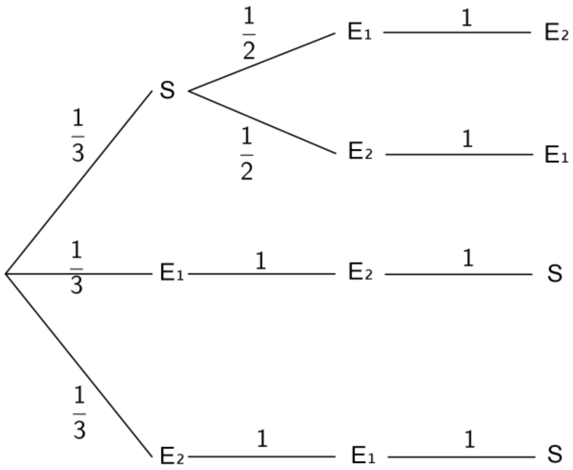
E_2 : « la porte mène à l'échec »

Deux stratégies s'offrent à Lucas :

Première stratégie : il ouvre une porte au hasard et ne change pas son choix

→il a une chance sur trois de choisir la bonne porte : $p(S)=\dfrac{1}{3}$

Deuxième stratégie : il ouvre une porte au hasard et puis change son choix après le passage de l'animateur :



→ $p(S)=p(E_1\cap E_2\cap S)+p(E_2\cap E_1\cap S)=\dfrac{1}{3}\times1\times1+\dfrac{1}{3}\times1\times1=\dfrac{2}{3}$

Lucas a tout intérêt à changer son choix.

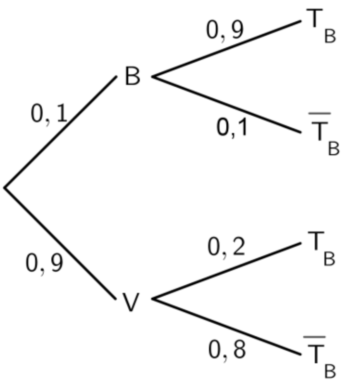
Exercice 4 :

Le juge doit déterminer la probabilité que le taxi était bleu sachant que le témoin a dit qu'il était bleu.

Soit B l'évènement : « le taxi était bleu » , V l'évènement « le taxi était vert » et T_B l'évènement : « le témoin affirme que le taxi était bleu ».

Ainsi le juge doit déterminer $p_{T_B}(B)$.

On peut dresser un arbre :



Explications :

Si le taxi est bleu, le témoin affirme qu'il est bleu avec une fiabilité de 80%

Si le taxi est vert, le témoin affirme qu'il est bleu avec une fiabilité de 20%

B et V forment une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :

$$p(T_B)=p(B\cap T_B)+p(V\cap T_B)=p(B)\times p_B(T_B)+p(V)\times p_V(T_B)=0{,}1\times0{,}9+0{,}9\times0{,}2=0{,}27$$

D'après la loi des probabilités conditionnelles :

$$p_{T_B}(B)=\frac{p(B\cap T_B)}{p(T_B)}=\frac{p(B)\times p_B(T_B)}{p(T_B)}=\frac{0{,}1\times0{,}9}{0{,}27}=\frac{0{,}09}{0{,}27}=\frac{1}{3}$$

Le juge ne peut donc raisonnablement condamner les « taxis bleus ».

Exercice 5 :

Un commerçant met en vente 50 tickets d'un certain jeu dont exactement 3 sont gagnants. Je lui achète 6 tickets. Avec quelle probabilité en ai-je acheté au moins un gagnant ?

Nous noterons G l'événement « L'un au moins des tickets achetés est gagnant ».

L'évènement contraire est $\overline{G}$: « aucun ticket n'est gagnant », ce qui signifie que les 6 tickets ont été sélectionnés parmi les 47 tickets perdants.

Ainsi : $$p\left(\overline{G}\right)=\frac{\text{nombre de combinaisons de 6 cartes parmi les 47 cartes perdantes}}{\text{nombre de combinaisons de 6 cartes parmi les 50 cartes du jeu}}$$

$$=\frac{\binom{47}{6}}{\binom{50}{6}}=\frac{\frac{47!}{6!\times(47-6)!}}{\frac{50!}{6!\times(50-6)!}}=\frac{\frac{47\times46\times45\times44\times43\times42}{1\times2\times3\times4\times5\times6}}{\frac{50\times49\times48\times47\times46\times45}{1\times2\times3\times4\times5\times6}}=\frac{\boxed{47}\times\boxed{46}\times\boxed{45}\times44\times43\times42}{50\times49\times48\times\boxed{47}\times\boxed{46}\times\boxed{45}}=\frac{473}{700}$$

Donc $$p(G)=1-p\left(\overline{G}\right)=1-\frac{473}{700}=\frac{227}{700}$$

Exercice 6 :

Un jeu de 32 cartes a été malicieusement truqué, on y a remplacé une carte autre que l'as de pique par un deuxième as de pique. On répète alors n fois avec remise l'expérience consistant à tirer simultanément 4 cartes. À partir de quelle valeur de n la probabilité de déceler la supercherie est-elle supérieure ou égale à 0,9 ?

La supercherie est décelée sur un seul tirage si l'on tire les 2 as de pique.

Soit l'événement A « La supercherie est décelée » : il s'agit de l'ensemble des tirages qui contiennent les deux as de pique.

On définit l'univers Ω l'ensemble des combinaisons de 4 cartes choisies dans les 32 cartes du jeu.

Ainsi : $$p(A)=\frac{\text{nombre de combinaisons de 4 cartes contenant 2 as de pique parmi les 32 cartes}}{\text{nombre de combinaisons de 4 cartes parmi les 32 cartes du jeu}}$$

$$=\frac{\binom{30}{2}\times\binom{2}{2}}{\binom{32}{4}}=\frac{\frac{30!}{2!\times28!}\times1}{\frac{32!}{4!\times28!}}=\frac{\frac{30\times29}{1\times2}}{\frac{32\times31\times30\times29}{1\times2\times3\times4}}=\frac{\boxed{30}\times\boxed{29}}{\boxed{1}\times\boxed{2}}\times\frac{\boxed{1}\times\boxed{2}\times3\times4}{32\times31\times\boxed{30}\times\boxed{29}}=\frac{3}{248}$$

Et la probabilité pour la supercherie ne soit pas décelée sur un seul tirage est $p\left(\overline{A}\right)=1-\frac{3}{248}=\frac{245}{248}$.

Supposons que l'on effectue n tirages A_1, A_2, …, A_n pour lesquels la supercherie est décelée.

La probabilité pour que la supercherie ne soit pas décelée au bout de n tirages est :

$$p\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right)=p\left(\overline{A_1}\right)\times p\left(\overline{A_2}\right)\times\ldots p\left(\overline{A_n}\right)=\left(\frac{245}{248}\right)^n$$

Ainsi la probabilité pour que la supercherie soit décelée à partir du n-ième tirage est égale à : $1-\left(\frac{245}{248}\right)^n$.

La probabilité de déceler la supercherie est supérieure ou égale à 0,9 si :

$$1-\left(\frac{245}{248}\right)^n > 0,9 \iff -\left(\frac{245}{248}\right)^n > 0,9-1 \iff -\left(\frac{245}{248}\right)^n > -0,1 \iff \left(\frac{245}{248}\right)^n < 0,1$$

Or le logarithme est une fonction croissante :

$$\iff \ln\left[\left(\frac{245}{248}\right)^n\right] < \ln 0,1 \iff n \times \ln\left(\frac{245}{248}\right) < \ln 0,1$$

Or $\frac{245}{248} < 1$ donc $\ln\left(\frac{245}{248}\right) < 0$

$$\iff n > \frac{\ln 0,1}{\ln\left(\frac{245}{248}\right)} \iff n > 189,19$$

A partir du 190ème rang.