Les suites numériques

Rappel : $\mathbb{N}$ *désigne l'ensemble des entiers naturels,* $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...\}$

UNE SUITE NUMERIQUE EST UNE LISTE ORDONNEE DE NOMBRES REELS.

I) Généralités sur les suites numériques

1) Vocabulaire :

Définition : Suite numérique

Une suite numérique est une liste infinie de nombres réels caractérisée par le positionnement de chaque nombre, repéré par son rang dans la suite.

Une **suite** est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ qui, pour tout entier naturel *n* supérieur à partir d'un entier naturel *p*, associe son image $u(n)$ ou u_n, appelé **terme général d'indice *n*** de la suite :

Si $n \geq p$: $n \mapsto u_n$.

On désigne l'ensemble des valeurs de la suite numérique par la notation (u_n), u ou $(u_n)_{n\geq p}$.

Soit un entier $k \geq p$: u_k est appelé un terme de la suite de rang (ou d'indice) *k*.

Remarques :

La notation (u_n) désigne l'ensemble des valeurs de la suite numérique

La notation u_n désigne un terme de rang (ou d'indice) *n* de la suite (u_n).

Le premier terme de la suite s'appelle le **terme initial**.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n+1$.

→ $u_0 = 2\times0+1=1$; $u_1 = 2\times1+1=3$;

$u_2 = 2\times2+1=5$; $u_3 = 2\times3+1=7$

u_0 est **le premier terme** de la suite ou le terme initial,

$u_n = 2n+1$ est le **terme général** de la suite.

Exemple : Soit *u* la suite définie par $u_n = n^3$

→ $u_0 = 0^3 = 0$; $u_1 = 1^3 = 1$; $u_2 = 2^3 = 8$; $u_3 = 3^3 = 27$

Notations :

Si u_n est le terme de rang *n* de la suite :

- le terme suivant est u_{n+1} → u_3 est le terme suivant u_2
- le terme précédent est u_{n-1} → u_8 est le terme précédent u_9

2) Mode de génération d'une suite :

Définition : Suite définie par une formule explicite (associée à une fonction)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une **formule explicite** s'il existe une fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ permettant de définir chaque terme de la suite par une relation de la forme :

$u_n = f(n)$.

On peut définir chacun des termes de la suite directement en fonction de son rang *n*.

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 2n^2 - 1$

Cette suite est associée à la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 - 1$.

Ainsi : $u_0 = 2\times 0^2 - 1 = -1$; $u_1 = 2\times 1^2 - 1 = 1$

$u_2 = 2\times 2^2 - 1 = 2\times 4 - 1 = 7$; $u_3 = 2\times 3^2 - 1 = 2\times 9 - 1 = 17$

Définition : **Suite définie par une relation de récurrence**

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une **formule de récurrence** si l'on connaît son premier terme et s'il existe une relation reliant chacun de ses termes au terme qui le précède.

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ où } f \text{ est une fonction}$$

Chaque terme est défini par rapport au(x) terme(s) précédent(s)

→pour calculer un terme de rang *n*, il est nécessaire de calculer tous les termes précédents de la suite.

Exemple : On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$ pour tout entier naturel *n*

Ainsi : $u_1 = 3u_0 + 1 = 3\times 2 + 1 = 7$; $u_2 = 3u_1 + 1 = 3\times 7 + 1 = 22$; $u_3 = 3u_2 + 1 = 3\times 22 + 1 = 67$

Exemple : On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel *n*

$u_1 = u_0(1-u_0) = 2(1-2) = -2$; $u_2 = u_1(1-u_1) = -2(1-(-2)) = -2\times 3 = -6$

$u_3 = u_2(1-u_2) = -6(1-(-6)) = -6\times 7 = -42$

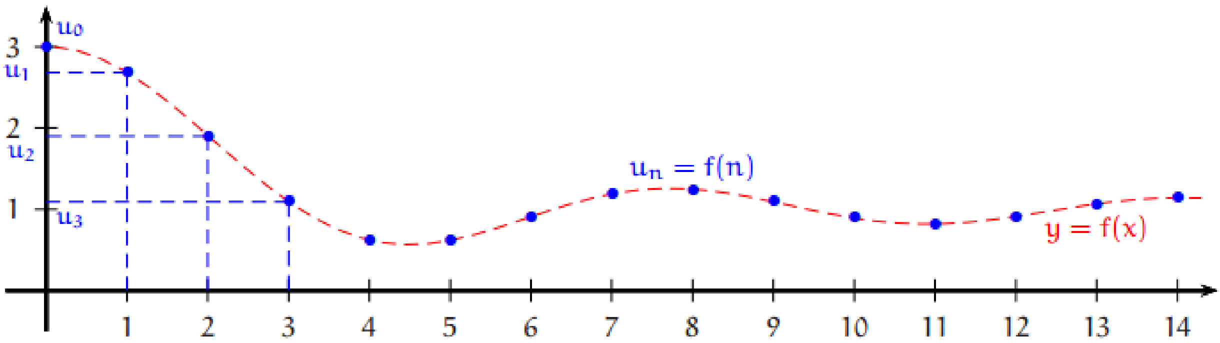
II) Représentation graphique d'une suite.

Définition : **Représentation graphique**

La **représentation graphique d'une suite** (u_n) dans un repère, est l'ensemble des points isolés de coordonnées $(0;u_0)$; $(1;u_1)$; $(2;u_2)$; … ; $(n;u_n)$; …

1) Suite définie de manière explicite : $u_n = f(n)$

Les points de la suite sont situés sur la représentation graphique de la fonction *f*.



Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{6}{n+2}$

Représenter la suite à l'aide de ses 5 premiers termes.

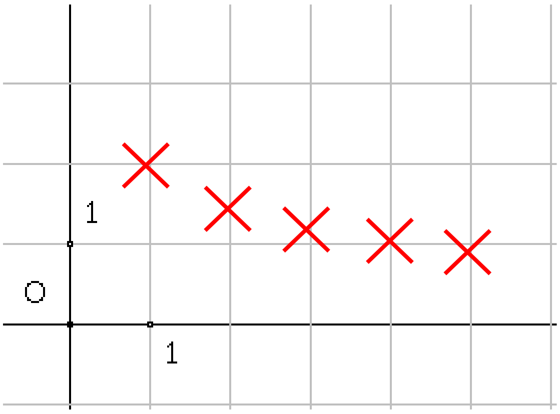
$u_1 = \dfrac{6}{1+2} = \dfrac{6}{3} = 2 \quad \rightarrow \quad A_1(1;2)$

$u_2 = \dfrac{6}{2+2} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5 \quad \rightarrow \quad A_2(2;1{,}5)$

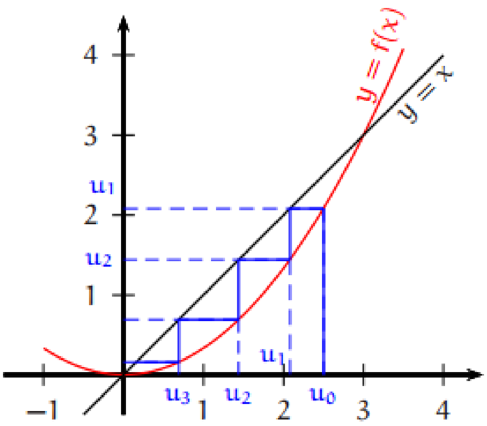
$u_3 = \dfrac{6}{3+2} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2 \quad \rightarrow \quad A_3(3;1{,}2)$

$u_4 = \dfrac{6}{4+2} = \dfrac{6}{6} = 1 \quad \rightarrow \quad A_4(4;1)$

$u_5 = \dfrac{6}{5+2} = \dfrac{6}{7} \quad \rightarrow \quad A_5\left(5;\dfrac{6}{7}\right)$



2) Suite définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$



a) On construit la courbe (C_f) représentant la fonction f et la droite (D) d'équation $y = x$.

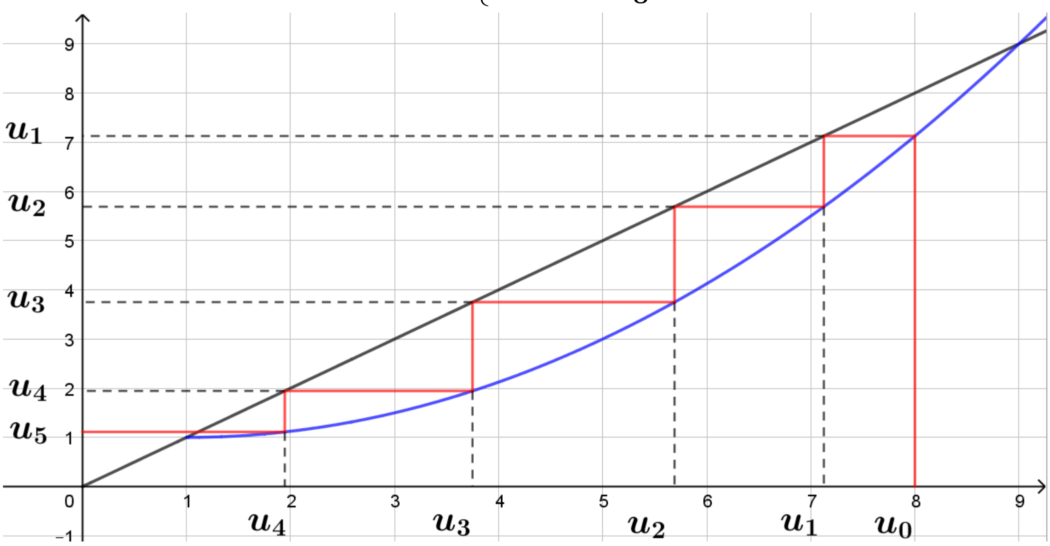
b) On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.

c) Avec un trait vertical partant de u_0 vers (C_f), on identifie $f(u_0) = u_1$ image de u_0.

d) A partir du point $(u_0 ; f(u_0))$ obtenu sur (C_f), on trace un trait horizontal pour rejoindre l'axe vertical et surtout la droite (D) sur laquelle on obtient le point de coordonnées $(u_1 ; u_1)$.

e) A partir du $(u_1 ; u_1)$, on trace un trait vertical jusqu'à l'axe horizontal pour obtenir le point $(u_1 ; 0)$ et on recommence.

Exemple : On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{(u_n - 1)^2}{8} + 1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n



On lit approximativement : $u_1 \simeq 7{,}1$; $u_2 \simeq 5{,}7$; $u_3 \simeq 3{,}7$; $u_4 \simeq 1{,}9$; $u_5 \simeq 1{,}1$

3) Avec la calculatrice :

On utilisera la lettre u au lieu de a pour la suite, v au lieu de b, et w au lieu de c.

- Appuyer sur la touche « mode » et sélectionner « Suite » dans la quatrième ligne (pour revenir en mode fonction, on sélectionnera « Fct »).
- Appuyer sur « $f(x)$ » : compléter en faisant attention que, pour la calculatrice, on définit la suite (u_n) par le terme u_n et non pas par le terme u_{n+1}.

  → pour les suites définies par une formule explicite, pour la variable *n*, utiliser la touche $\boxed{X,T,\theta,n}$

  → pour les suites définies par récurrence, pour la variable ***u***, appuyer sur la touche $\boxed{2^{nd}}$ puis $\boxed{7}$
- Dans le menu « table », on obtient les valeurs des termes successifs de la suite (u_n). Quelle est la valeur de u_{10} ? de u_{20} ?
- Dans le menu « fenêtre », régler les paramètres de la fenêtre graphique pour pouvoir visualiser la représentation graphique de la suite (u_n) pour *n* allant de 0 à 20. Appuyer sur « graphe ».

III) Sens de variation d'une suite

Définition : **Suite croissante, suite décroissante**

On dit que la suite (u_n) est **strictement croissante** si chaque terme de la suite est strictement supérieur au terme qui le précède : pour tout entier *n* : $u_{n+1} > u_n$.

On dit que la suite (u_n) est **strictement décroissante** si chaque terme de la suite est strictement inférieur au terme qui le précède : pour tout entier *n* : $u_{n+1} < u_n$.

On dit que la suite (u_n) est **constante** ou **stationnaire** si chaque terme de la suite est égal au terme qui le précède : pour tout entier *n* : $u_{n+1} = u_n$.

Remarques :

- Une suite peut être croissante, décroissante ou constante **à partir d'un certain rang** seulement.
- Comme pour les fonctions, la plupart des suites ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

Propriété : **Sens de variation des suites définies de manière explicite**

Soit une suite définie, pour tout entier $n \geq p$, par une formule explicite du type $u_n = f(n)$ où *f* est une fonction définie dans l'intervalle $[p;+\infty[$.

Si f est croissante sur $[p;+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang *p*.

Si f est décroissante sur $[p;+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang *p*.

Démonstration :

Si *f* est croissante sur $[p;+\infty[$, alors pour tout entier $n \geq p$, la relation $n+1 \geq n$ implique :

$f(n+1) \geq f(n)$ soit $u_{n+1} \geq u_n$: la suite est croissante à partir du rang *p*.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $u_n = n^2 - 2n$

→ la fonction associée est $f(x) = x^2 - 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$: cette dérivée est positive si $x - 1 > 0 \iff x > 1$

Si $x > 1$, la dérivée est positive et la fonction *f* est croissante sur $[1;+\infty[$

Comme la suite ***u*** est définie par : $u_n = f(n)$, alors la suite ***u*** est croissante à partir du rang 1.

Méthodes : **Etude des variations d'une suite :**

1) **Soit on étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$:**

Si $u_{n+1}-u_n \leq 0$ pour toute valeur de n, alors $u_{n+1} \leq u_n$ **: la suite (u_n) est décroissante**
Si $u_{n+1}-u_n \geq 0$ pour toute valeur de n, alors $u_{n+1} \geq u_n$ **: la suite (u_n) est croissante**

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $u_n = n^2 - 2n$

$$u_{n+1}-u_n = \left[(n+1)^2 - 2(n+1)\right] - \left[n^2 - 2n\right] = \left[n^2 + 2n + 1 - 2n - 2\right] - n^2 + 2n = 2n - 1$$

→ $2n-1>0 \Leftrightarrow n > \frac{1}{2}$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1}-u_n > 0$ si $n \geq 1$: ***u*** est croissante à partir du rang 1

2) **Pour une suite à termes strictement positifs, on peut aussi comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :**

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$: **la suite** (u_n) est **croissante**
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$: **la suite** (u_n) est **décroissante**

Exemple : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$: cette suite est positive.

$$v_{n+1}-v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{-2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$$: ce n'est pas très élégant

→ $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$: Ainsi : $0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, (donc $0 < v_{n+1} < v_n$ pour tout entier n)

donc la suite ***v*** est décroissante

Exercice : Etudier les variations de la suite définie pour tout entier n par $u_n = \frac{6}{n+2}$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{6}{(n+1)+2}}{\frac{6}{n+2}} = \frac{6}{n+3}\times\frac{n+2}{6} = \frac{n+2}{n+3}$$

Or $2<3 \Leftrightarrow n+2<n+3 \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+3} < \frac{n+3}{n+3} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+3} < 1$

Donc $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

IV) Notion de limite d'une suite

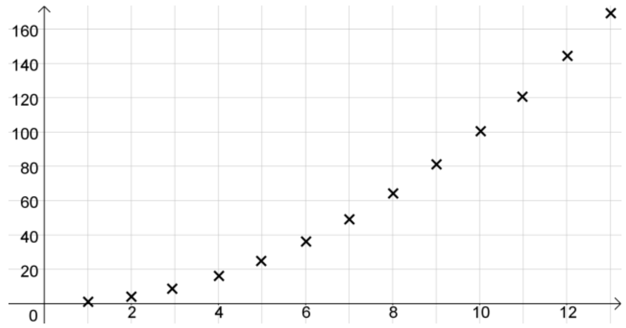
On désigne par (u_n) une suite numérique. On peut se demander ce que deviennent les nombres u_n **lorsque *n* prend des valeurs (positives !) de plus en plus grandes.**

On dit alors que « ***n* tend vers $+\infty$** ».

On peut déjà conjecturer ce comportement à partir des exemples ci-dessous :

Approche graphique.

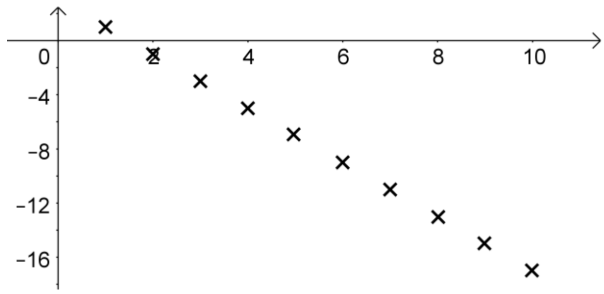
Situation 1 : $u_n = n^2$



Les nombres u_n deviennent de plus en plus grands « quand n tend vers $+\infty$ ».

On dit que la suite (u_n) **tend vers** $+\infty$

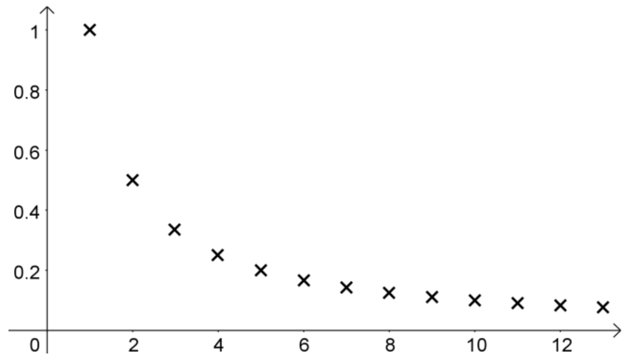
Situation 2 : $u_n = -2n+3$



Les nombres u_n deviennent de plus en plus grands « quand n tend vers $+\infty$ » en valeur absolue, mais négatifs.

On dit que la suite (u_n) **tend vers** $-\infty$.

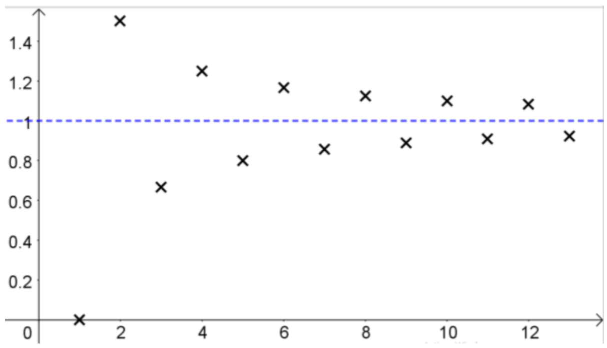
Situation 3 : $u_n = \frac{1}{n}$



Les nombres u_n deviennent de plus en plus proches de zéro « quand n tend vers $+\infty$ ».

On dit que la suite (u_n) **tend vers** 0

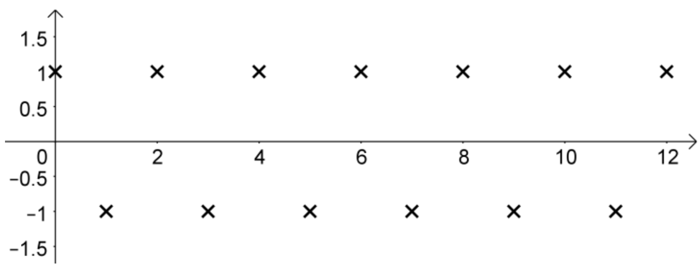
Situation 4 : $u_n = 1+\frac{(-1)^n}{n}$



Les nombres u_n viennent s'accumuler autour de la valeur fixe **1** « quand n tend vers $+\infty$ ».

On dit que la suite (u_n) **tend vers** 1.

Situation 5 : $u_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 \text{ si n est impair} \\ +1 \text{ si n est pair} \end{cases}$

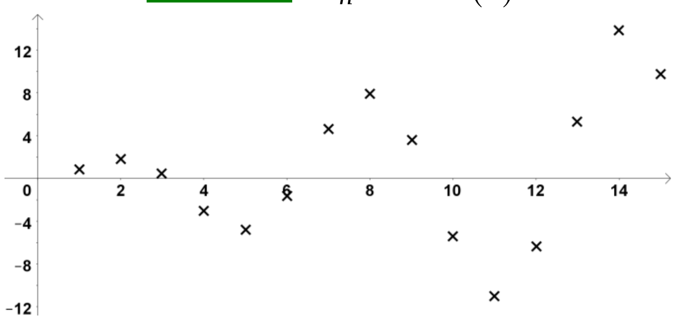


La suite (u_n) est bornée (majorée par 1 et minorée par –1). Elle ne peut donc avoir une limite infinie.

De plus, les nombres u_n ne se rapprochent d'aucun nombre réel fixe lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite (u_n) n'a **pas de limite**.

Situation 6 : $u_n = n \times \sin(n)$



La suite (u_n) n'est ni majorée, ni minorée. Elle ne peut donc avoir une limite finie.

De plus, les nombres u_n prennent alternativement des valeurs négatives et positives.

La suite (u_n) ne peut donc avoir une limite infinie.

La suite (u_n) n'a **pas de limite.**

Définition : Suite convergente

Si lorsque n augmente indéfiniment, les terme de la suite (u_n) se rapprochent d'un nombre réel L, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers L.

→la limite de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$, est égale à L.

On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$.

Exemple : Un groupe de n personnes se partage une pizza en parts égales.
On note u_n la masse d'une part lorsque la pizza est découpée en n parts.
De manière intuitive, plus le nombre de gourmands augmente et plus la masse de chaque part diminue et devient de plus en plus proche de 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Définition : Suite divergente

Une suite (u_n) est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

Exemple : Le créateur du jeu d'échec avait demandé en récompense un grain de riz sur la première case de l'échiquier, deux grains sur les deuxième, quatre grains sur la troisième et ainsi de suite, ce qui faisait 2^{63} grains sur la 64$^{\text{ème}}$ case.
Si l'on définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ comptabilisant le nombre de grains de riz sur chaque case, et si le nombre de cases de l'échiquier était infini, on pourrait écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Exemple : On lance aléatoirement un dé équilibré à 6 faces et on enregistre le résultat de chaque lancer dans une suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$.
Cette suite ne possède aucune limite quand n tend vers $+\infty$ en vertu de la dimension aléatoire de l'expérience.
Cette suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est divergente.

V) Programmation en python autour des suites définies par récurrence

Exercice 1 :

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer la valeur u_{15}.
2) Déterminer le rang à partir duquel tous les termes de la suite croissante (u_n) dépassent la valeur 1 000 000.

1)

Programmation classique	Programmation récursive

n = 0
u = 2
for i in range(1,16):
    n += 1
    u = 3*u + 1
print(n,u)
 	
On obtient : 15 35872267
	def u(n):
	    if n == 0:
	        return 2
	    else:
	        return 3*u(n-1) + 1
	
	y = u(15)
	print(y)

2)

Programmation classique	Programmation récursive

<pre>n = 0
u = 2
while u <= 1000000:
    n += 1
    u = 3*u + 1
print(n,u)</pre>
On obtient : 12 1328602
	<pre>def v(n):
	    if n == 0:
	        return 2
	    else:
	        return 3*v(n-1) + 1
	
	n = 0
	u = 2
	while u <= 1000000:
	    n += 1
	    u = v(n)
	print(n,u)</pre>

Exercice 2 :

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \ , \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer la valeur u_{22}.
2) Déterminer le rang à partir duquel tous les termes de la suite croissante (u_n) dépassent la valeur 1 000 000.

1)

Programmation classique	Programmation récursive

<pre>n , m = 0 , 1
u , v = 3 , 1
for i in range(2,23):
    m += 1
    u = 2*v + u
    u , v = v , u
print(m,v)</pre>
On obtient : 22 209064253
	<pre>def u(n):
	    if n == 0:
	        return 3
	    elif n == 1:
	        return 1
	    else:
	        return 2*u(n-1) + u(n-2)
	
	y = u(22)
	print(y)</pre>

2)

Programmation classique	Programmation récursive

<pre>n , m = 0 , 1
u , v = 3 , 1
while v < 1000000:
    m += 1
    u = 2*v + u
    u , v = v , u
  print(m,v)</pre>
On obtient : 16 1055907
	<pre>def w(n):
	    if n == 0:
	        return 3
	    elif n == 1:
	        return 1
	    else:
	        return 2*w(n-1) + w(n-2)
	
	n , m = 0 , 1
	u , v = 3 , 1
	while v < 1000000:
	    m += 1
	    u = w(m)
	    u , v = v , u
	print(m,v)</pre>