

Equations trigonométriques

Exercice 5A.1 : Résoudre les équations suivantes $]-\pi; \pi]$:

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$

b) $4\cos^2 x - 3 = 0$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $4\sin^2 x - 2 = 0$

Exercice 5A.2 : Résoudre les équations suivantes dans le domaine demandé.

1) $\cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$

2) $\sin(t) = \frac{-1}{2}$ sur \mathbb{R}

3) $\cos(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ sur $]-\pi; \pi]$

4) $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0; 2\pi[$

Exercice 5A.3 : Résoudre dans \mathbb{R} :

1) $\sin^2 x - 5\sin x + 6 = 0$

2) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

3) $2\cos^3 x + 5\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

4) $2\cos^2 x - \cos x = 0$

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 5A.1 :

Résoudre les équations suivantes sur $]-\pi; \pi]$:

a) $\cos x = -\frac{1}{2} : S = \left\{ \frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} \right\}$

b) $4\cos^2 x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x = 3$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

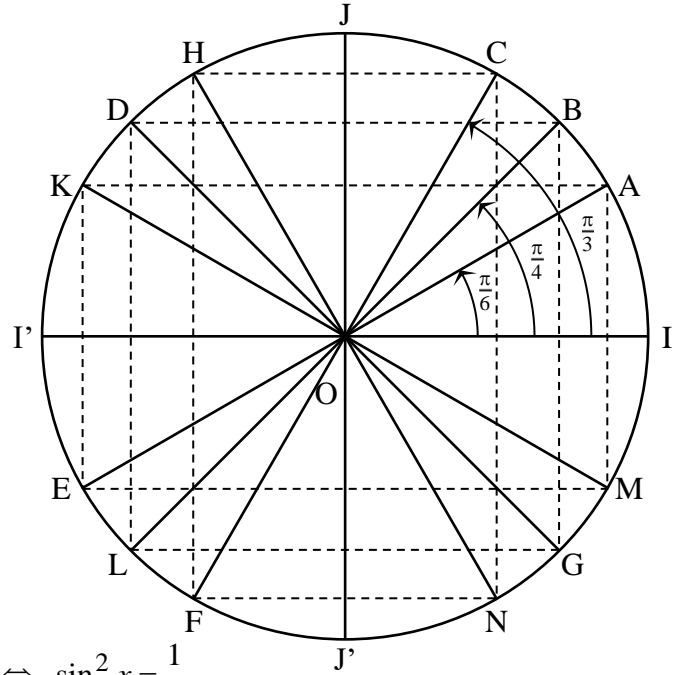
$S = \left\{ \frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6} \right\}$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} : S = \left\{ -\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} \right\}$

d) $4\sin^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x = 2 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$

Soit $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4} \right\}$



Exercice 5A.2 : Résoudre les équations suivantes dans le domaine demandé.

1) $\cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[: S = \left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$

2) $\sin(t) = -\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R} : S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi; -\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$

3) $\cos(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ sur $]-\pi; \pi]$

Pour tout réel $t : -1 \leq \cos(t) \leq 1$ or $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$

Sur $]-\pi; \pi]$: $\cos(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ n'a pas de solution : $S = \emptyset$

4) $\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0; 2\pi[: S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$

Exercice 5A.3 :

1) $\sin^2 x - 5\sin x + 6 = 0$: on effectue un changement de variables, on pose $X = \sin x$

l'équation devient : $X^2 - 5X + 6 = 0$

calcul du discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 = 25 - 24 = 1 = 1^2$

les solutions sont : $X_1 = \frac{-(-5) - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $X_2 = \frac{-(-5) + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

or $X = \sin x$, donc soit $\sin x = 2$, soit $\sin x = 3$, ce qui est impossible donc $S = \emptyset$.

2) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

on pose $X = \sin x$, l'équation devient : $2X^2 - X - 1 = 0$

calcul du discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = 3^2$

les solutions sont : $X_1 = \frac{-(-1) - 3}{2 \times 2} = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{-(-1) + 3}{2 \times 2} = \frac{1 + 3}{4} = 1$

or $X = \sin x$, donc :

soit $\sin x = -\frac{1}{2}$, ainsi :

soit $x = -\frac{\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$, soit $x = -\frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

soit $\sin x = 1$, ainsi :

$x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Les solutions sont : $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi; \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}$.

3) $2 \cos^3 x + 5 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$: on pose : $X = \cos x$

on doit alors résoudre : $2X^3 + 5X^2 + X - 2 = 0 \rightarrow -1$ est racine évidente, on factorise par $X + 1$

d'où par division :

$2X^3 + 5X^2 + X - 2$	$X + 1$
$-(2X^3 + 2X^2)$	
$3X^2 + X$	$2X^2 + 3X - 2$
$-(3X^2 + 3X)$	
$-2X - 2$	
$-(-2X - 2)$	
0	

donc on doit résoudre : $(X + 1)(2X^2 + 3X - 2) = 0$

calcul du discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 = 5^2$

les solutions sont : $X_1 = \frac{-3 - 5}{2 \times 2} = \frac{-8}{4} = -2$ et $X_2 = \frac{-3 + 5}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

or $X = \cos x$, donc soit : $\cos x = -1$, soit : $\cos x = -2$, soit : $\cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k \times 2\pi$; $\cos x = -2$ n'a pas de solution

$\cos x = \frac{1}{2}$: soit $x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$, soit $x = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$

donc $S = \left\{ \pi + k \times 2\pi; \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi; -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \right\}$

4) $2 \cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 \cos x - 1) = 0$

Soit : $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}[\pi]$

Soit : $2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{2}[\pi]; \frac{\pi}{3}[2\pi]; -\frac{\pi}{3}[2\pi] \right\}$ et $S_{] -\pi; \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right\}$