Contrôle de trigonométrie

Toute la géographie, la trigonométrie et l'arithmétique du monde ne servent à rien si tu n'apprends pas à penser par toi-même. **Carlos Ruiz Zafon**
Celui qui méconnaît le cosinus et le sinus, il n'a qu'à prendre la tangente et disparaître. **Moussa Laidi**

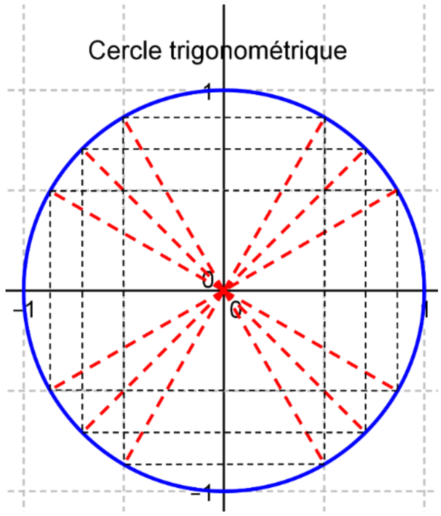
Exercice 1 : *(5 pt)*

En vous aidant du cercle trigonométrique ci-contre, simplifier au maximum les écritures suivantes :

$$A = \left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$B = \sin(-x) + \cos(\pi - x) + \sin(x + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



Exercice 2 : *(3 pt)*

Déterminer les mesures principales des angles $\frac{92\pi}{7}$ et $\frac{-50\pi}{9}$. Justifier vos réponses.

Exercice 3 : *(4 pts)*

Convertir $\frac{11\pi}{36}$ en degré puis convertir $173°$ en radians. Justifier vos réponses.

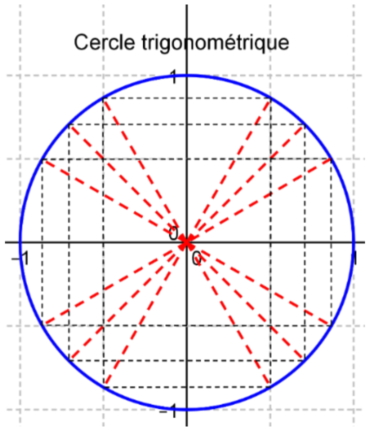
Exercice 4 : *(8 pts)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(5x)$

1) Etudier la parité de la fonction f.
2) a) Etudier la périodicité de la fonction f.

   b) En déduire que l'on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{5}\right]$.
3) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{5}\right]$ puis sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{5}\right]$.

Contrôle de trigonométrie – CORRIGE - Notre Dame de La Merci – M. Quet



Exercice 1 : *(5 pt)*

$$A=\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\right)^2-\left(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{1}{2}=-2\times\frac{\sqrt{6}}{2}=-\sqrt{6}$$

$$B=\sin(-x)+\cos(\pi-x)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\sin x-\cos x-\sin x+\sin x+\cos x=-\sin x$$

$$C=2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-2\sin x-\cos x+\cos x=-2\sin x$$

Exercice 2 : *(3 pt)*

Déterminer les mesures principales des angles $\frac{92\pi}{7}$ *et* $\frac{-50\pi}{9}$*. Justifier vos réponses.*

En remarquant que : $2\pi=\frac{14\pi}{7}$, on obtient :

$$\frac{92\pi}{7}=\frac{84\pi}{7}+\frac{8\pi}{7}=\frac{98\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}$$, or $\frac{8\pi}{7}$ n'est pas une mesure principale

$$\rightarrow \frac{92\pi}{7}=-\frac{6\pi}{7}+7\times 2\pi$$

En remarquant que : $2\pi=\frac{18\pi}{9}$, on obtient :

$$\frac{-50\pi}{9}=-\frac{54\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}=\frac{4\pi}{9}-3\times 2\pi$$

Exercice 3 : *(4 pts)*

Convertir $\frac{11\pi}{36}$ *en degré puis convertir* $173°$ *en radians. Justifier vos réponses.*

(4 pts)

π	$\frac{11\pi}{36}$
180	x

180	173
π	x

A partir de ces tableaux de proportionnalité, on réalise des produits en croix :

$$\pi\times x=\frac{11\pi}{36}\times 180$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{11\boxed{\pi}\times 180}{36\times\boxed{\pi}}=\frac{11\times\boxed{18}\times 10}{\boxed{18}\times 2}=55°$$

$$180\times x=173\times\pi$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{173\times\pi}{180}$$

Exercice 4 : *(8 pts)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(5x)$

1) *Etudier la parité de la fonction f.*

$$f(-x)=\sin\big(5\times(-x)\big)=\sin(-5x)=-\sin(5x)=-f(x)$$

La fonction f est impaire, on peut l'étudier sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) **a)** *Etudier la périodicité de la fonction f.*

Soit p la période cherchée, vérifiant :

$$f(x+p)=f(x)$$
$$\Leftrightarrow \sin\big(5(x+p)\big)=\sin(5x)$$
$$\Leftrightarrow \sin(5x+5p)=\sin(5x)$$

On pose : $\mathrm{X}=5x$, ainsi :

$$\sin(\mathrm{X}+5p)=\sin(\mathrm{X})$$

Or la fonction $\sin(\mathrm{X})$ est 2π-périodique, donc :

$$5p=2\pi$$
$$\Leftrightarrow p=\frac{2\pi}{5}$$

La fonction f est $\frac{2\pi}{5}$-périodique, on peut l'étudier sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{5}\right]$.

b) *En déduire que l'on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{5}\right]$.*

La fonction f étant également impaire, on peut l'étudier sur le demi-intervalle $\left[0;\frac{\pi}{5}\right]$.

3) *Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{5}\right]$ puis sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{5}\right]$.*

X	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(\mathrm{X})$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On en déduit le tableau de variation de la fonction $\sin(5x)$ sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{5}\right]$:

x	0		$\frac{\pi}{10}$		$\frac{\pi}{5}$
$\sin(5x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

En intégrant l'imparité de la fonction f, on obtient :

x	$-\frac{\pi}{5}$		$-\frac{\pi}{10}$		0		$\frac{\pi}{10}$		$\frac{\pi}{5}$
$\sin(5x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0