1ère spé **Notre Dame de La Merci** **Décembre 2023**

Interrogation de Mathématiques sur les suites numériques

Une gamme de piano correspond à une suite de notes correspondant à un même mode, soit mineur soit majeur. Une octave commence par la dernière note de la gamme. Celle-ci est inférieure si la gamme de piano est descendante et supérieure, si celle-ci est montante. Autrement dit, une gamme de piano se définit en une suite ordonnée de différents niveaux de tonalités.

Exercice 1

On définit comme suit une suite (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1{,}5u_n + n - 2 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer les premiers termes u_1, u_2 et u_3 en décrivant chaque étape des calculs.
2) Déterminer avec votre calculatrice la valeur exacte de u_{40} arrondi au centième.

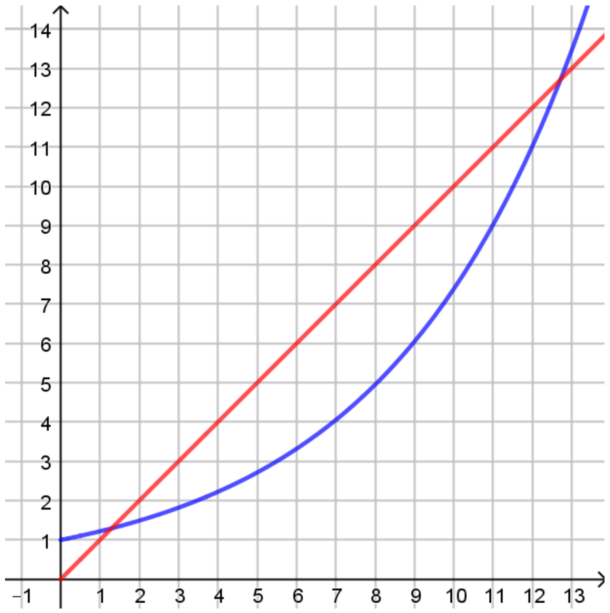
Exercice 2 en deux parties

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Construire avec précision la valeur des termes u_1 à u_4 (vous laisserez les traits de construction).

Vous indiquerez sur votre copie les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4 obtenues par lecture graphique.

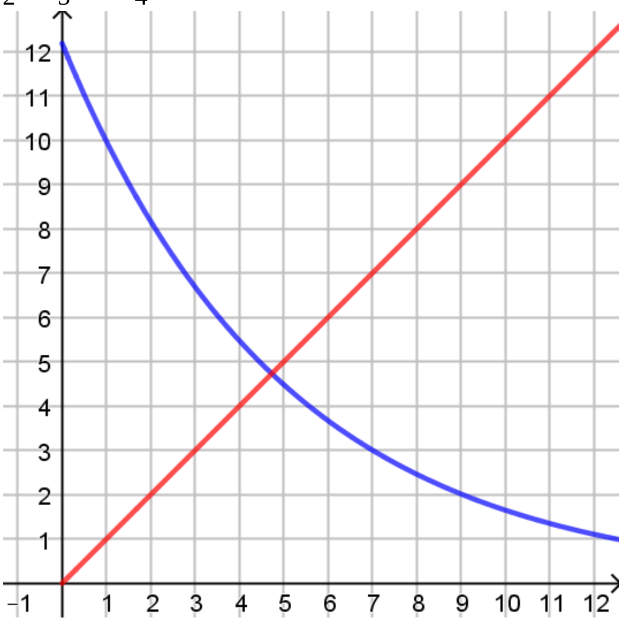


On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

Construire avec précision la valeur des termes u_1 à u_4 (vous laisserez les traits de construction).

Vous indiquerez sur votre copie les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4 obtenues par lecture graphique.



Exercice 3

Etudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

a) $u_n = n^2 - 12n + 8$ $(n \in \mathbb{N})$ de deux manières différentes

b) $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ (sans utiliser de fonction associée)

c) $u_n = \dfrac{1000n}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

Interrogation de Mathématiques sur les suites numériques – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1

On définit comme suit une suite (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1,5u_n + n - 2 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

1) *Calculer les premiers termes* u_1, u_2 *et* u_3 *en décrivant chaque étape des calculs.*

$$u_1 = u_{0+1} = 1,5u_0 + 0 - 2 = 1,5 \times 2 + 0 - 2 = 1$$
$$u_2 = u_{1+1} = 1,5u_1 + 1 - 2 = 1,5 \times 1 + 1 - 2 = 0,5$$
$$u_3 = u_{2+1} = 1,5u_2 + 2 - 2 = 1,5 \times 0,5 = 0,75$$

2) *Déterminer avec votre calculatrice la valeur exacte de* u_{40} *arrondi au centième.*

$$u_{40} \simeq 22\,114\,584,64$$

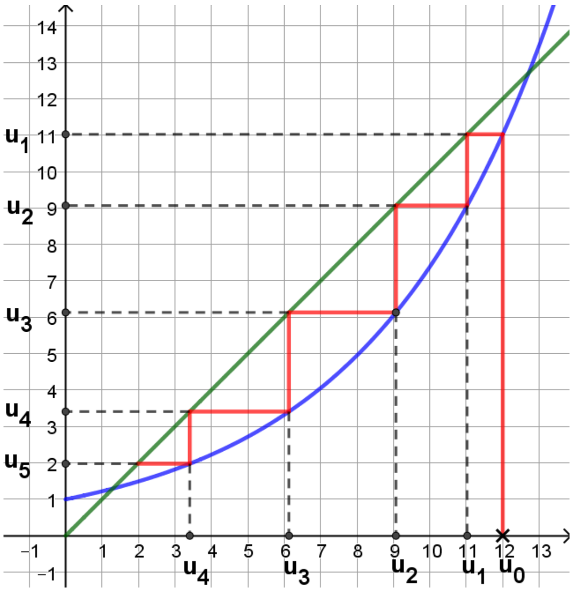
Exercice 2

On considère la suite (u_n) *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Construire avec précision *la valeur des termes* u_1 *à* u_4 *(vous laisserez les traits de construction).*

Vous indiquerez sur votre copie les valeurs de u_1, u_2, u_3 *et* u_4 *obtenues par lecture graphique.*



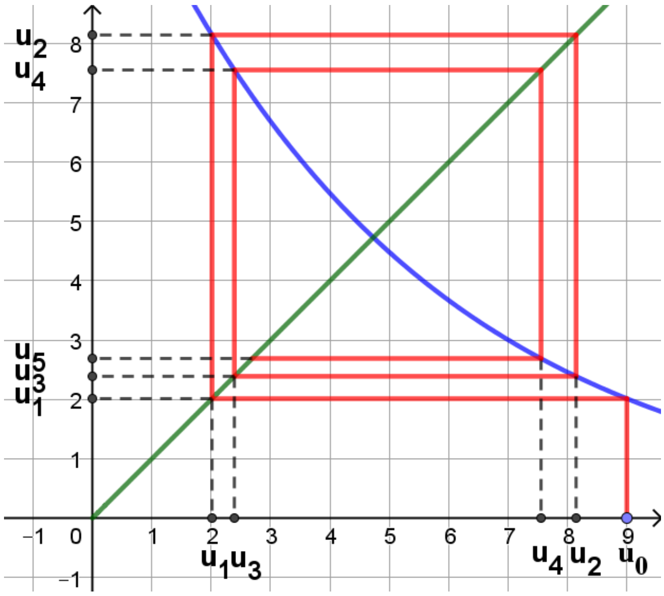
On obtient : $u_1 \simeq 11$, $u_2 \simeq 9$, $u_3 \simeq 6,1$, $u_4 \simeq 3,4$

On considère la suite (u_n) *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

Construire avec précision *la valeur des termes* u_1 *à* u_4 *(vous laisserez les traits de construction).*

Vous indiquerez sur votre copie les valeurs de u_1, u_2, u_3 *et* u_4 *obtenues par lecture graphique.*



On obtient : $u_1 = 2$, $u_2 \simeq 8,1$, $u_3 \simeq 2,4$, $u_4 \simeq 7,5$

Exercice 3

Etudier le sens de variation des suites (u_n) *définies ci-dessous :*

a) $u_n = n^2 - 12n + 8$ $(n \in \mathbb{N})$ de deux manières différentes

$$u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - 12(n+1) + 8\right] - \left(n^2 - 12n + 8\right)$$
$$= n^2 + 2n + 1 - 12n - 12 + 8 - n^2 + 12n - 8 = 2n - 11$$

$\rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \iff 2n - 11 > 0 \iff 2n > 11 \iff n > \dfrac{11}{2}$

La suite (u_n) est croissante à partir du sixième rang.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 - 12(n+1) + 8}{n^2 - 12n + 8} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 12n - 12 + 8}{n^2 - 12n + 8} = \frac{n^2 - 12n + 8 + 2n - 11}{n^2 - 12n + 8}$$

$$= \frac{n^2 - 12n + 8}{n^2 - 12n + 8} + \frac{2n - 11}{n^2 - 12n + 8} = 1 + \frac{2n - 11}{n^2 - 12n + 8}$$

$\rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 144 - 32 = 112$ donc deux racines :

$$n_1 = \frac{-(-12) - \sqrt{112}}{2 \times 1} = \frac{12 - \sqrt{4 \times 28}}{2} = 6 - \sqrt{28} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-(-12) + \sqrt{112}}{2 \times 1} = 6 + \sqrt{28}$$

Cette méthode ne marche pas CAR la suite (u_n) possède des termes négatifs.

La fonction associée est : $f(x) = x^2 - 12x + 8$ représentée par une parabole « orientée vers le haut »

$\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{2} = 6$ donc cette fonction est croissante pour tout $x > 6$.

La suite (u_n) est croissante à partir du sixième rang.

b) $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ (sans utiliser de fonction associée)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n+5}{n+2} \times \frac{n+1}{n+1} - \frac{2n+3}{n+1} \times \frac{n+2}{n+2}$$

$$= \frac{2n^2 + 2n + 5n + 5}{(n+2)(n+1)} - \frac{2n^2 + 4n + 3n + 6}{(n+2)(n+1)} = \frac{(2n^2 + 7n + 5) - (2n^2 + 7n + 6)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$$

$n \in \mathbb{N}$ donc : $n + 2 > 0$ et $n + 1 > 0$

Ainsi : $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2(n+1)+3}{(n+1)+1}}{\dfrac{2n+3}{n+1}} = \frac{2n+5}{n+2} \times \frac{n+1}{2n+3} = \frac{2n^2 + 2n + 5n + 5}{2n^2 + 3n + 4n + 6} = \frac{2n^2 + 7n + 5}{2n^2 + 7n + 6}$$

$$= \frac{2n^2 + 7n + 6 - 1}{2n^2 + 7n + 6} = \frac{2n^2 + 7n + 6}{2n^2 + 7n + 6} - \frac{1}{2n^2 + 7n + 6} = 1 - \frac{1}{2n^2 + 7n + 6}$$

$\rightarrow \Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 48 = 1$ donc deux racines :

$$n_1 = \frac{-7 - 1}{2 \times 2} = \frac{-8}{4} = -2 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-7 + 1}{2 \times 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$a = 2$ donc la parabole est « orientée vers le haut » :

pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2n^2 + 7n + 6 > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Les termes de la suite (u_n) étant tous positifs, la suite (u_n) est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $u_n = \dfrac{1000n}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1000(n+1)}{2^{n+1}}}{\dfrac{1000n}{2^n}} = \frac{1000(n+1)}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{1000n} = \frac{1000(n+1)}{1000n} \times \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{n} \times \frac{\boxed{2^n}}{2 \times \boxed{2^n}} = \frac{n+1}{2n}$$

$$1 \leq n \iff 1+n \leq n+n \iff \frac{1+n}{n+n} \leq \frac{n+n}{n+n} \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

Les termes de la suite (u_n) étant tous positifs, la suite (u_n) est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.