Contrôle de trigonométrie

La calculatrice n'est pas autorisée

L'univers se répète, à l'exception peut-être de l'histoire.
De toutes les études terrestres, l'histoire est la seule qui ne se répète pas. ...
L'astronomie se répète, la botanique se répète, la trigonométrie se répète,
la mécanique se répète, la division longue composée se répète.
Chaque somme, si elle est calculée de la même manière à n'importe quel moment, donnera la même réponse. ...
Un grand nombre de modernes disent que l'histoire est une science ; si c'est le cas, elle occupe une place solitaire et splendide parmi les sciences ; c'est la seule science dont les conclusions sont toujours erronées.
Chesterton

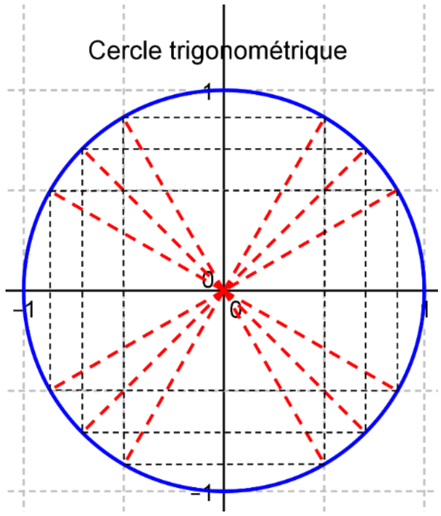
Exercice 1 : *(4,5 pt)*

En vous aidant du cercle trigonométrique ci-contre, simplifier au maximum les écritures suivantes :

$$A=\left(\cos\pi-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$B=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin(-x)+3\cos(x+\pi)-\sin(x-\pi)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$C=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]^2-1$$



Exercice 2 : *(3 pt)*

Déterminer les mesures principales des angles $\frac{64\pi}{7}$ et $\frac{-93\pi}{5}$. Justifier vos réponses.

Exercice 3 : *(3 pts)*

Convertir $\frac{7\pi}{24}$ en degrés puis convertir $230°$ en radians en valeur exacte. Justifier vos réponses.

Exercice 4 : *(3 pts)*

En vous aidant du cercle trigonométrique, résoudre les équations et inéquations suivantes sur $]-\pi;\pi]$:

a) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x\leq\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}<\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 5 : *(6,5 pts : 1,5 – 1,5 – 0,5 - 3)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\sin(2x)$

1) a) Etudier la parité de la fonction f.
b) Etudier la périodicité de la fonction f.
c) En déduire que l'on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Dresser le tableau de variation complet de f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ puis sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Auto-évaluation : ……..

Contrôle de trigonométrie – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1 : *(4,5 pt)*

$$A=\left(\cos\pi-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2=\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$=(-1)^2-2\times(-1)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$

$$=1+\sqrt{2}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{4}=\frac{4}{4}+\frac{2\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$B=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin(-x)+3\cos(x+\pi)-\sin(x-\pi)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\cos x-(-\sin x)+3\times(-\cos x)-(-\sin(\pi-x))-\sin x$$

$$=2\cos x+\sin x-3\cos x+\sin(\pi-x)-\sin x$$

$$=2\cos x+\sin x-3\cos x+\sin x-\sin x$$

$$=-\cos x+\sin x$$

$$C=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]^2-1=(\sin x-\cos x)^2-1$$

$$=\sin^2x-2\sin x\cos x+\cos^2x-1=1-2\sin x\cos x-1=-2\sin x\cos x$$

Exercice 2 : Mesures principales *(3 pt)*

$$\frac{64\pi}{7}=\frac{14\pi}{7}+\frac{14\pi}{7}+\frac{14\pi}{7}+\frac{14\pi}{7}+\frac{14\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}=-\frac{6\pi}{7}+5\times2\pi$$

$$\frac{-93\pi}{5}=\frac{-90\pi}{5}-\frac{3\pi}{5}=-\frac{3\pi}{5}-9\times\frac{10\pi}{5}=-\frac{3\pi}{5}-9\times2\pi$$

Exercice 3 : Conversions *(3 pts)*

Convertir $\frac{7\pi}{24}$ *en degrés puis convertir* $230°$ *en radians en valeur exacte. Justifier vos réponses.*

π	$\frac{7\pi}{24}$
180	x

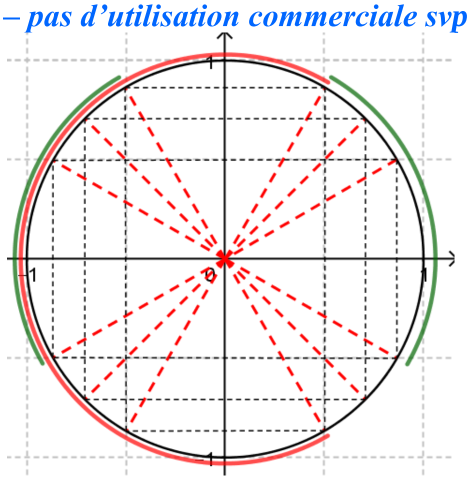
180	230
π	x

A partir de ces tableaux de proportionnalité, on réalise des produits en croix :

$$\pi\times x=\frac{7\pi}{24}\times180 \iff x=\frac{7\pi\times180}{24}\times\frac{1}{\pi}=\frac{7\times15}{2}=51,2°$$

$$180\times x=230\times\pi \iff x=\frac{230\pi}{180}=\frac{23\pi}{18}$$

Exercice 4 : Equations et inéquations trigonométriques *(3 pts)*



a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad S = \left\{ -\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4} \right\}$

c) $\cos x \leq \frac{1}{2}$ $\quad S = \left] -\pi ; -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3} ; \pi \right]$

d) $-\frac{1}{2} < \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad S = \left] -\pi ; -\frac{5\pi}{6} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi \right]$

Exercice 5 : *(6,5 pts : 1,5 – 1,5 – 0,5 - 3)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\sin(2x)$

1) **a)** *Etudier la parité de la fonction f.*

$f(-x) = 3\sin(2\times(-x)) = 3\sin(-2x) = -3\sin(2x) = -f(x)$: la fonction f est impaire.

b) *Etudier la périodicité de la fonction f.*

Soit p la période cherchée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on doit avoir :

$$f(x+p) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin(2(x+p)) = 3\sin(2x)$$

$$\Leftrightarrow 3\sin(2x+2p) = 3\sin(2x+2\pi)$$ car la fonction sinus est 2π-périodique

$$\Leftrightarrow \sin(2x+2p) = \sin(2x+2\pi)$$

$$\Leftrightarrow 2p = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

La fonction f est π-périodique.

c) *En déduire que l'on peut étudier la fonction f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.*

La fonction f étant impaire et π-périodique, on peut l'étudier sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ puis la compléter par symétrie centrale afin de la connaître sur la période $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2) *Dresser le tableau de variation complet de f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ puis sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$*

On pose $\mathrm{X} = 2x$ donc si $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\mathrm{X} \in [0;\pi]$.

X	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(\mathrm{X})$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On en déduit le tableau de variation de la fonction $\sin(2x)$ puis de f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{5}\right]$:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin(2x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$3\sin(2x)$			3		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

En intégrant l'imparité de la fonction f , on obtient :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$3\sin(2x)$	0						3		
		$\searrow$			$\nearrow$			$\searrow$	
			-3						0