Contrôle sur les probabilités conditionnelles

Quels que soient les progrès des connaissances humaines,
il y aura toujours place pour l'ignorance et par suite pour le hasard et la probabilité.
Emile Borel
Le hasard, ce sont les lois que nous ne connaissons pas.

Exercice 1 : *(8 points)*

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 70 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 6 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 4 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a. Construire un arbre pondéré complet représentant la situation.
b. Calculer la probabilité de tirer une ampoule ayant un défaut et venant de la machine B.
c. Calculer la probabilité de tirer une ampoule sans défaut.
d. L'ampoule tirée est sans défaut.
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

Exercice 2 : *(12 points)*

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0;80]$.

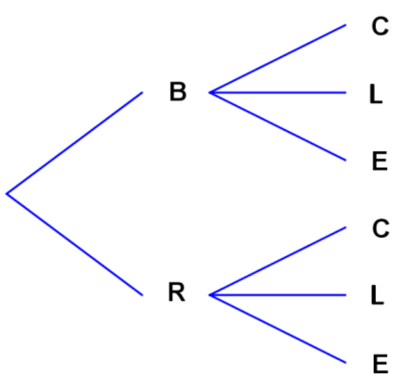
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

- parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
- parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On note les évènements :

B : « le cube est bleu »
R : « le cube est rouge »
C : « le cube a ses faces marquées d'un cercle »
L : « le cube a ses faces marqués d'un losange »
E : « le cube a ses faces marquées d'une étoile ».

On tire au hasard un cube de l'urne.



1. Compléter les probabilités sur l'arbre ci-contre.
2. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0{,}12+0{,}004x$.
3. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
4. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
5. On suppose dans cette question que $x=50$.
Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Auto-évaluation : .....

Contrôle sur les probabilités conditionnelles – CORRIGE – M. Quet

Exercice 1 : *(8 points)*

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 70 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

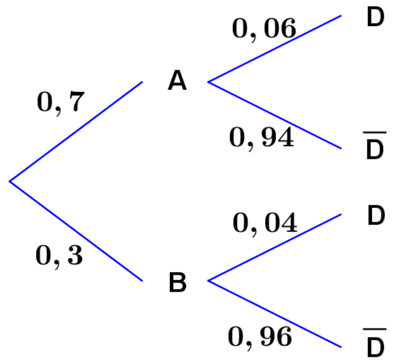
- *à la sortie de la machine A, 6 % des ampoules présentent un défaut ;*
- *à la sortie de la machine B, 4 % des ampoules présentent un défaut.*

On définit les évènements suivants :

- *A : « l'ampoule provient de la machine A » ;*
- *B : « l'ampoule provient de la machine B » ;*
- *D : « l'ampoule présente un défaut ».*

On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a. *Construire un arbre pondéré complet représentant la situation.*



b. *Calculer la probabilité de tirer une ampoule ayant un défaut et venant de la machine B.*

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})=p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D})=0,7\times0,06=0,042$$

La probabilité cherchée est 0,042, soit 4,2 %.

c. *Calculer la probabilité de tirer une ampoule sans défaut.*

A et B forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\overline{\mathrm{D}}) &= p(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{D}})+p(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{D}}) \\ &= p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{D}})+p(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{D}}) \\ &= 0,7\times0,94+0,3\times0,96 \\ &= 0,946 \end{aligned}$$

La probabilité de tirer une ampoule sans défaut est 0,946, soit 94,6 %.

d. *L'ampoule tirée est sans défaut. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.*

$$p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{A})=\frac{p(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{D}})}{p(\overline{\mathrm{D}})}=\frac{p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\overline{\mathrm{D}})}{p(\overline{\mathrm{D}})}=\frac{0,7\times0,94}{0,946}\simeq0,6956$$

La probabilité est environ égale à 0,6956, soit environ 69,56 %.

Exercice 2 : *(12 points)*

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0;80]$.

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

- *parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.*
- *parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.*

On note les évènements :

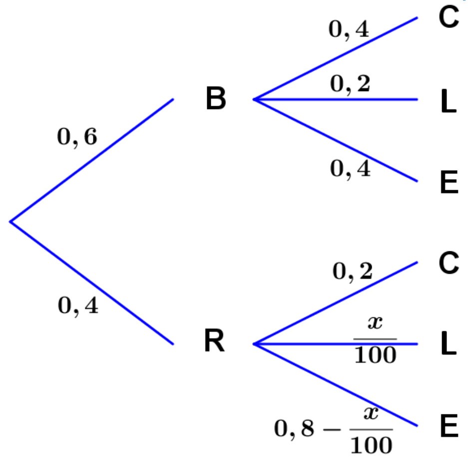
B : « le cube est bleu »
R : « le cube est rouge »
C : « le cube a ses faces marquées d'un cercle »
L : « le cube a ses faces marqués d'un losange »
E : « le cube a ses faces marquées d'une étoile ».

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. *Compléter les probabilités sur l'arbre ci-contre.*

x est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;80]$ donc parmi les cubes rouges :

- la probabilité que leurs faces soient marquées d'un losange est égale à $\dfrac{x}{100}$;
- la probabilité que leurs faces soient marquées d'une étoile est : $1-0,2-\dfrac{x}{100}=0,8-\dfrac{x}{100}$.



2. *Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à* $0,12+0,004x$.

B et R forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{L}) &= p(\mathrm{B}\cap\mathrm{L})+p(\mathrm{R}\cap\mathrm{L}) \\ &= p(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{L})+p(\mathrm{R})\times p_{\mathrm{R}}(\mathrm{L}) \\ &= 0,6\times0,2+0,4\times\frac{x}{100} \\ &= 0,12+0,004x \end{aligned}$$

3. *Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.*

D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{E}) &= p(\mathrm{B}\cap\mathrm{E})+p(\mathrm{R}\cap\mathrm{E}) \\ &= p(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{E})+p(\mathrm{R})\times p_{\mathrm{R}}(\mathrm{E}) \\ &= 0,6\times0,4+0,4\times\left(0,8-\frac{x}{100}\right) \\ &= 0,24+0,32-0,004x \\ &= 0,56-0,004x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p(\mathrm{L})=p(\mathrm{E}) \\ \Leftrightarrow\ & 0,12+0,004x=0,56-0,004x \\ \Leftrightarrow\ & 0,004x+0,004x=0,56-0,12 \\ \Leftrightarrow\ & 0,008x=0,44 \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{0,44}{0,008}=55 \end{aligned}$$

4. *Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.*

$$p(\mathrm{B})=0,6 \quad , \quad p(\mathrm{L})=0,12+0,004x$$

et $\quad p(\mathrm{B}\cap\mathrm{L})=p(\mathrm{B})\times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{L})=0,6\times0,2=0,12$

L'indépendance de ces évènements s'écrit :

$$\begin{aligned} & p(\mathrm{B})\times p(\mathrm{L})=p(\mathrm{B}\cap\mathrm{L}) \\ \Leftrightarrow\ & 0,6\times(0,12+0,004x)=0,12 \\ \Leftrightarrow\ & 0,072+0,0024x=0,12 \\ \Leftrightarrow\ & 0,0024x=0,12-0,072 \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{0,12-0,072}{0,0024}=20 \end{aligned}$$

Autre méthode :

$$p_{\mathrm{B}}(\mathrm{L}) = p(\mathrm{L})$$

$$\Leftrightarrow \; 0,2 = 0,12 + 0,004x$$

$$\Leftrightarrow \; 0,2 - 0,12 = 0,004x$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{0,08}{0,004} = x$$

$$\Leftrightarrow \; x = 20$$

5. *On suppose dans cette question que* $x = 50$.

Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

$$p_{\mathrm{L}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{L})}{p(\mathrm{L})} = \frac{0,12}{0,12 + 0,004 \times 50} = \frac{0,12}{0,32} = 0,375$$