Contrôle sur les probabilités conditionnelles

Quels que soient les progrès des connaissances humaines,
il y aura toujours place pour l'ignorance et par suite pour le hasard et la probabilité.
Emile Borel
Le hasard, ce sont les lois que nous ne connaissons pas.

QCM (Questions à Choix Multiples)

Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte.
Justifiez soigneusement vos réponses. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Si vous avez justifié la bonne réponse, il n'est pas nécessaire de justifier que les autres propositions ne sont pas valables. N'hésitez pas à faire des schémas … pour y voir clair

Question 1 :

Soit A et B deux évènements. On donne : $p(\mathrm{A})=\frac{3}{7}$, $p(\mathrm{B})=\frac{3}{20}$ et $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{4}{7}$.

a) A et B sont indépendants. **b)** $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{3}{980}$

c) $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{140}$ **d)** $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{1}{60}$

Question 2 :

Soit A et B deux évènements tels que $p(\mathrm{A})=0,4$, $p(\mathrm{B})=0,6$ et $p\left(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)=0,3$.

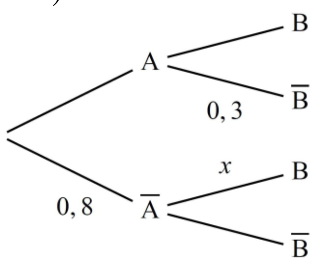
a) $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{4}{7}$ **b)** $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0,8$

c) $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0,1$ **d)** $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0,24$

Question 3 :

Soit A et B deux évènements.
On donne l'arbre de probabilité suivant et $p(\mathrm{B})=0,78$.

a) $x=0,6$ b) $x=0,7$
c) $x=0,8$ d) $x=0,9$



Exercice 2 :

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.
On choisit une personne au hasard dans cet hypermarché et on appelle :

- F : « La personne est une femme »
- B : « La personne a acheté un article au rayon bricolage »

1) Traduire les données de l'énoncé à l'aide des notations données puis construire l'arbre de probabilité.
2) Calculer la probabilité qu'une femme achète un article au rayon bricolage.
3) Calculer la probabilité qu'une personne achète un article au rayon bricolage.
4) Une personne a acheté un article au rayon bricolage, quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, que ce soit un homme ?
5) Est-il vrai qu'à peu près 90 % des personnes ressortant sans article de bricolage sont des femmes ? Justifier.

Exercice 3 :

Soit un paquet de 50 cartes contenant un même nombre de cartes de « Sciences » et d'« Économie». Une question liée à un de ces deux thèmes figure sur chaque carte.
Les cartes sont mélangées et on en tire une au hasard. Ensuite, on répond à la question.
Un groupe participe à ce jeu. Connaissant leurs points forts et leurs faiblesses, on estime :

- qu'il a 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en sciences ;
- qu'il a 1 chance sur 8 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en économie.

On note S « La question concerne les Sciences » et B « La réponse donnée est bonne ».

1) Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2) Calculer $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{B})$.
3) Déterminer la probabilité que le groupe réponde correctement à la question.
4) Les événements S et B sont-ils indépendants ?
5) Est-il possible d'ajouter ou de retirer des cartes de « Sciences » pour que les événements S et B soient indépendants ? Arrondir à l'entier le plus proche en cas de possibilité.

Auto-évaluation :.....

Contrôle sur les probabilités conditionnelles – CORRIGE – M. Quet

QCM (Questions à Choix Multiples)

Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte.
Justifiez soigneusement vos réponses. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Si vous avez justifié la bonne réponse, il n'est pas nécessaire de justifier que les autres propositions ne sont pas valables. N'hésitez pas à faire des schémas … pour y voir clair

Question 1 :

Soit A et B deux évènements. On donne : $p(\mathrm{A})=\frac{3}{7}$, $p(\mathrm{B})=\frac{3}{20}$ *et* $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{4}{7}$.

Formule de Poincaré :

$$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$\Leftrightarrow\quad p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{3}{7}+\frac{3}{20}-\frac{4}{7}=\frac{1}{140}$$ → **réponse a)**

De plus : $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\dfrac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}=\dfrac{\frac{1}{140}}{\frac{3}{7}}=\dfrac{1}{60}$ → **réponse d)**

Il n'y a pas d'indépendance : $p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})=\frac{3}{7}\times\frac{3}{20}=\frac{9}{140}\neq p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

Question 2 :

Soit A et B deux évènements tels que $p(\mathrm{A})=0,4$, $p(\mathrm{B})=0,6$ *et* $p(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=0,3$.

B et $\overline{\mathrm{B}}$ forment une partition, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+p(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=p(\mathrm{A})$$

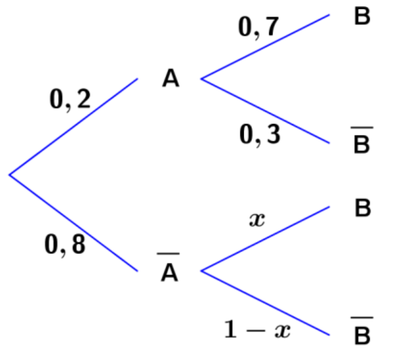
$$\Leftrightarrow\quad p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})-p(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})=0,4-0,3=0,1$$ → **réponse c)**

D'après la formule de Poincaré :

$$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})-p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0,4+0,6-0,1=0,9$$

Question 3 :

Soit A et B deux évènements.
On donne l'arbre de probabilité suivant et $p(\mathrm{B})=0,78$.



On doit d'abord compléter l'arbre. On cherche $p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$.

A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+p(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{B})$$

$$\Leftrightarrow\quad p(\mathrm{A})\times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})+p(\overline{\mathrm{A}})\times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=p(\mathrm{B})$$

$$\Leftrightarrow\quad 0,2\times0,7+0,8\times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=0,78$$

$$\Leftrightarrow\quad 0,8\times p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=0,78-0,14$$

$$\Leftrightarrow\quad p_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})=\frac{0,64}{0,8}=0,8$$

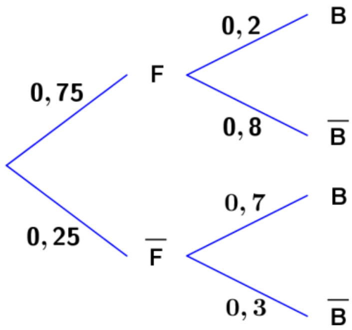
Exercice 2 :

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.
On choisit une personne au hasard dans cet hypermarché et on appelle :

- *F : « La personne est une femme »*
- *B : « La personne a acheté un article au rayon bricolage »*

1) *Traduire les données de l'énoncé à l'aide des notations données puis construire l'arbre de probabilité.*

$$p(\mathrm{F})=0,75 \ , \quad p_{\mathrm{F}}(\mathrm{B})=\frac{1}{5}=0,2 \quad , \quad p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{B})=\frac{7}{10}=0,7$$



2) *Calculer la probabilité qu'une femme achète un article au rayon bricolage.*

$$p(\mathrm{F}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{F})\times p_{\mathrm{F}}(\mathrm{B})=0,75\times 0,2=0,15$$

La probabilité qu'une femme achète un article au rayon bricolage est de 0,15 soit 15%.

3) *Calculer la probabilité qu'une personne achète un article au rayon bricolage.*

F et $\overline{\mathrm{F}}$ forment une partition, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{B})=p(\mathrm{F}\cap\mathrm{B})+p\left(\overline{\mathrm{F}}\cap\mathrm{B}\right)=0,15+p\left(\overline{\mathrm{F}}\right)\times p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{B})$$
$$=0,15+0,25\times 0,75=0,325$$

La probabilité qu'une personne achète un article au rayon bricolage est 0,3375 soit près d'une personne sur trois.

4) *Une personne a acheté un article au rayon bricolage, quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, que ce soit un homme ?*

$$p_{\mathrm{B}}\left(\overline{\mathrm{F}}\right)=\frac{p\left(\overline{\mathrm{F}}\cap\mathrm{B}\right)}{p(\mathrm{B})}=\frac{p\left(\overline{\mathrm{F}}\right)\times p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}=\frac{0,25\times 0,7}{0,325}=\frac{7}{13}\simeq 0,538$$

La probabilité qu'une personne ayant acheté un article au rayon bricolage soit un homme est d'environ 51,9 %.

5) *Est-il vrai qu'à peu près 90 % des personnes ressortant sans article de bricolage sont des femmes ?*

Il s'agit de calculer la probabilité qu'une personne n'ayant pas acheté d'article au rayon bricolage soit une femme :

$$p_{\overline{\mathrm{B}}}(\mathrm{F})=\frac{p\left(\mathrm{F}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)}{p\left(\overline{\mathrm{B}}\right)}=\frac{p(\mathrm{F})\times p_{\mathrm{F}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right)}{1-p(\mathrm{B})}=\frac{0,75\times 0,8}{1-0,325}=\frac{8}{9}\simeq 0,8889$$

A peu près 90 % des personnes ressortant sans article de bricolage sont des femmes.

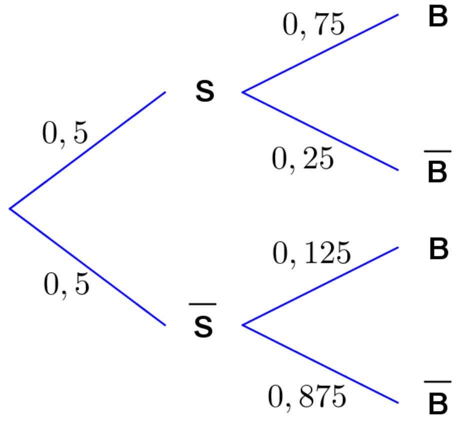
Exercice 3 :

Soit un paquet de 50 cartes contenant un même nombre de cartes de « Sciences » et d'« Économie». Une question liée à un de ces deux thèmes figure sur chaque carte.
Les cartes sont mélangées et on en tire une au hasard. Ensuite, on répond à la question.
Un groupe participe à ce jeu. Connaissant leurs points forts et leurs faiblesses, on estime :

- *qu'il a 3 chances sur 4 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en sciences ;*
- *qu'il a 1 chance sur 8 de donner la bonne réponse lorsqu'il est interrogé en économie.*

On note S « La question concerne les Sciences » et B « La réponse donnée est bonne ».

1) *Représenter cette situation par un arbre pondéré.*
Voir ci-contre.



2) *Calculer* $p(S\cap B)$.

$$p(S\cap B)=p(S)\times p_S(B)=0,5\times 0,75=0,375.$$

3) *Déterminer la probabilité que le groupe réponde correctement à la question.*

S et $\overline{S}$ forment une partition, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(S\cap B)+p\left(\overline{S}\cap B\right) \\ &= p(S)\times p_S(B)+p\left(\overline{S}\right)\times p_{\overline{S}}(B) \\ &= 0,375+0,5\times 0,125 \\ &= 0,4375 \end{aligned}$$

4) *Les événements S et B sont-ils indépendants ?*

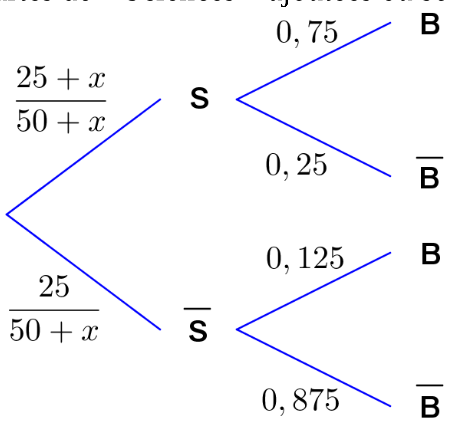
$$p(S)\times p(B)=0,5\times 0,4375=0,21875$$

Or : $p(S\cap B)=0,375$

Les évènements S et B ne sont pas indépendants.

5) *Est-il possible d'ajouter ou de retirer des cartes de « Sciences » pour que les événements S et B soient indépendants ? Arrondir à l'entier le plus proche en cas de possibilité.*

Soit x le nombre de cartes de « Sciences » ajoutées ou soustraites. L'arbre de probabilité devient :



S et $\overline{S}$ forment une partition, d'après la loi des probabilités totales :

$$p(B)=p(S\cap B)+p\left(\overline{S}\cap B\right)=p(S)\times p_S(B)+p\left(\overline{S}\right)\times p_{\overline{S}}(B)$$

$$=\frac{25+x}{50+x}\times 0,75+\frac{25}{50+x}\times 0,125=\frac{18,75+0,75x+3,125}{50+x}=\frac{0,75x+21,875}{50+x}$$

On a : $p(S)=\dfrac{25+x}{50+x}$

et : $p(S\cap B)=p(S)\times p_S(B)=\dfrac{25+x}{50+x}\times 0,75=\dfrac{18,75+0,75x}{50+x}$

Si les évènements S et B sont indépendants, alors :

$$p(S)\times p(B)=p(S\cap B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{25+x}{50+x}\times\frac{0,75x+21,875}{50+x}=\frac{18,75+0,75x}{50+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(25+x)(0,75x+21,875)}{(50+x)^2}=\frac{18,75+0,75x}{50+x}\times\frac{50+x}{50+x}$$

$$\Leftrightarrow (25+x)(0,75x+21,875)=(18,75+0,75x)(50+x)$$

On multiplie les deux membres par 100 :

$$\Leftrightarrow \quad (25+x)(75x+2187,5)=(1875+75x)(50+x)$$
$$\Leftrightarrow \quad 1875x+54687,5+75x^2+2187,5x=93750+1875x+3750x+75x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 4062,5x+54687,5=5625x+93750$$
$$\Leftrightarrow \quad 4062,5x-5625x=93750-54687,5$$
$$\Leftrightarrow \quad -1562,5x=39062,5$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{39062,5}{-1562,5}=-25$$

Il n'y a pas de solution puisqu'il faudrait retirer toutes les cartes de « Sciences ».

Autre approche :

$p_{\mathrm{S}}(\mathrm{B})=0,75$ et $p(\mathrm{B})=\dfrac{0,75x+21,875}{50+x}$

Si les évènements S et B sont indépendants, alors :

$$p(\mathrm{B})=p_{\mathrm{S}}(\mathrm{B})$$

Soit :

$$\frac{0,75x+21,875}{50+x}=0,75$$
$$\Leftrightarrow \quad 0,75x+21,875=0,75(50+x)$$
$$\Leftrightarrow \quad 0,75x+21,875=37,5+0,75x$$
$$\Leftrightarrow \quad 21,875=37,5$$

Il n'y a pas de solution.