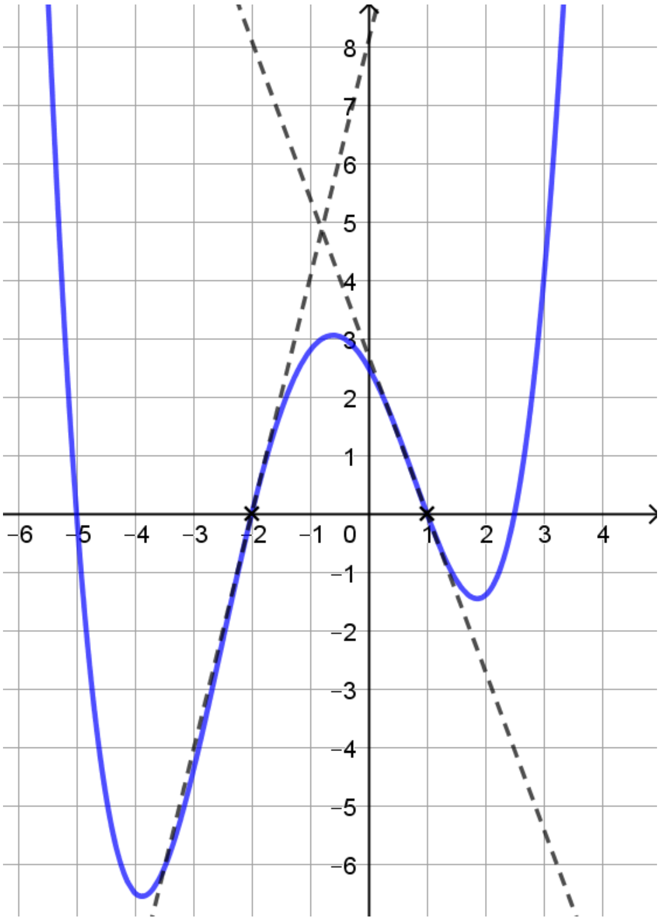
Interrogation sur la dérivation

Exercice 1 : *(3 points)*

Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5,5;3,3]$.

Vos réponses devront être précises à $\pm 0,1$ près



1) Par lecture graphique, déterminer les valeurs exactes de $f'(-2)$ et de $f'(1)$.
2) Déterminer les abscisses de tous les points $x \in [-5,5;3,3]$ vérifiant $f'(x)=0$.
3) Pour quelles valeurs de x a-t-on :
   $f'(x)>0$.

Exercice 2 : *(10 points)*

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x)=4x^2\left(1-2\sqrt{x}\right)$

b) $g(x)=\dfrac{1-x^2}{3+2x}$

c) $h(x)=\left(\dfrac{5+x}{1-2x}\right)^2$

Exercice 3 : *(7 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3-6x^2-90x+96$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

a) Déterminer la dérivée de la fonction f.

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

c) Déterminer les abscisses pour lesquelles la courbe C_f admet des tangentes horizontales.

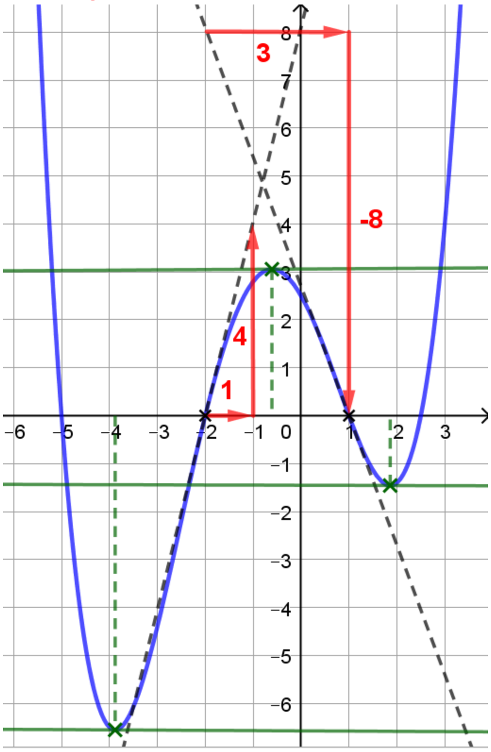
d) Déterminer les abscisses pour lesquelles la courbe C_f admet des tangentes parallèles à la droite d'équation : $y=-90x$.

Auto-évaluation : ....

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – M. Quet

Exercice 1 : *(3 points)*

Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5,5;3,3]$.



1) *Par lecture graphique, déterminer les valeurs exactes de $f'(-2)$ et de $f'(1)$.*

$$f'(-2)=4 \quad \text{et} \quad f'(1)=-\frac{8}{3}.$$

2) *Déterminer les abscisses de tous les points $x\in[-5,5;3,3]$ vérifiant $f'(x)=0$.*

Une dérivée nulle traduit la présence d'une tangente horizontale. On trouve trois solutions :

$$S=\{-3,9;-0,6;1,9\}$$

3) *Pour quelles valeurs de x a-t-on : $f'(x)>0$?*

Une dérivée positive traduit que les tangentes sont croissantes, donc que la fonction est croissante :

$$S=[-3,9;-0,6]\cup[1,9;3,3]$$

Exercice 2 : *Dériver les fonctions suivantes :* *(10 points)*

a) $f(x)=4x^2\left(1-2\sqrt{x}\right)$ on pose : $u(x)=4x^2$ et $v(x)=1-2\sqrt{x}$

ainsi : $u'(x)=4\times 2x=8x$ et $v'(x)=0-2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

On obtient :

$$f'(x)=8x\times\left(1-2\sqrt{x}\right)+4x^2\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=8x-16x\sqrt{x}-\frac{4x^2}{\sqrt{x}}=8x-16x\sqrt{x}-4x\sqrt{x}=8x-20x\sqrt{x}$$

b) $g(x)=\dfrac{1-x^2}{3+2x}$ on pose : $u(x)=1-x^2$ et $v(x)=3+2x$

ainsi : $u'(x)=-2x$ et $v'(x)=2$

On obtient :

$$g'(x)=\frac{-2x(3+2x)-\left(1-x^2\right)\times 2}{(3+2x)^2}=\frac{-6x-4x^2-2+2x^2}{(3+2x)^2}=\frac{-2x^2-6x-2}{(3+2x)^2}$$

c) $h(x)=\left(\dfrac{5+x}{1-2x}\right)^2$ on pose : $u(x)=5+x$ et $v(x)=1-2x$

ainsi : $u'(x)=1$ et $v'(x)=-2$

La dérivée de $U(x)=\left(\dfrac{5+x}{1-2x}\right)$ est :

$$U'(x)=\frac{1(1-2x)-(5+x)\times(-2)}{(1-2x)^2}=\frac{1-2x+10+2x}{(1-2x)^2}=\frac{11}{(1-2x)^2}$$

Ainsi : $h'(x)=2\times\left(\dfrac{5+x}{1-2x}\right)\times\dfrac{11}{(1-2x)^2}=\dfrac{22(5+x)}{(1-2x)^3}$.

Exercice 3 :

(7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3-6x^2-90x+96$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

a) *Déterminer la dérivée de la fonction f.*

$$f'(x)=2\times3x^2-6\times2x-90=6x^2-12x-90$$

b) *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.*

L'équation est donnée par la relation :

$$y=f'(1)\times(x-1)+f(1).$$

Or : $f(1)=2\times1^3-6\times1^2-90\times1+96=2-6-90+96=2$

$$f'(1)=6\times1^2-12\times1-90=6-12-90=-96$$

Ainsi :

$$y=-96(x-1)+2=-96x+96+2=-96x+98$$

c) *Déterminer les abscisses pour lesquelles la courbe C_f admet des tangentes horizontales.*

On doit résoudre : $f'(x)=0$, soit :

$$6x^2-12x-90=0$$
$$\Leftrightarrow\ 6\left(x^2-2x-15\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\ x^2-2x-15=0$$

Discriminant :

$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-15)=4+60=64=8^2$$

$\Delta>0$ donc deux racines :

$$x_1=\frac{-(-2)-8}{2\times1}=\frac{2-8}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-2)+8}{2\times1}=\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5$$

La courbe admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses -3 et 5.

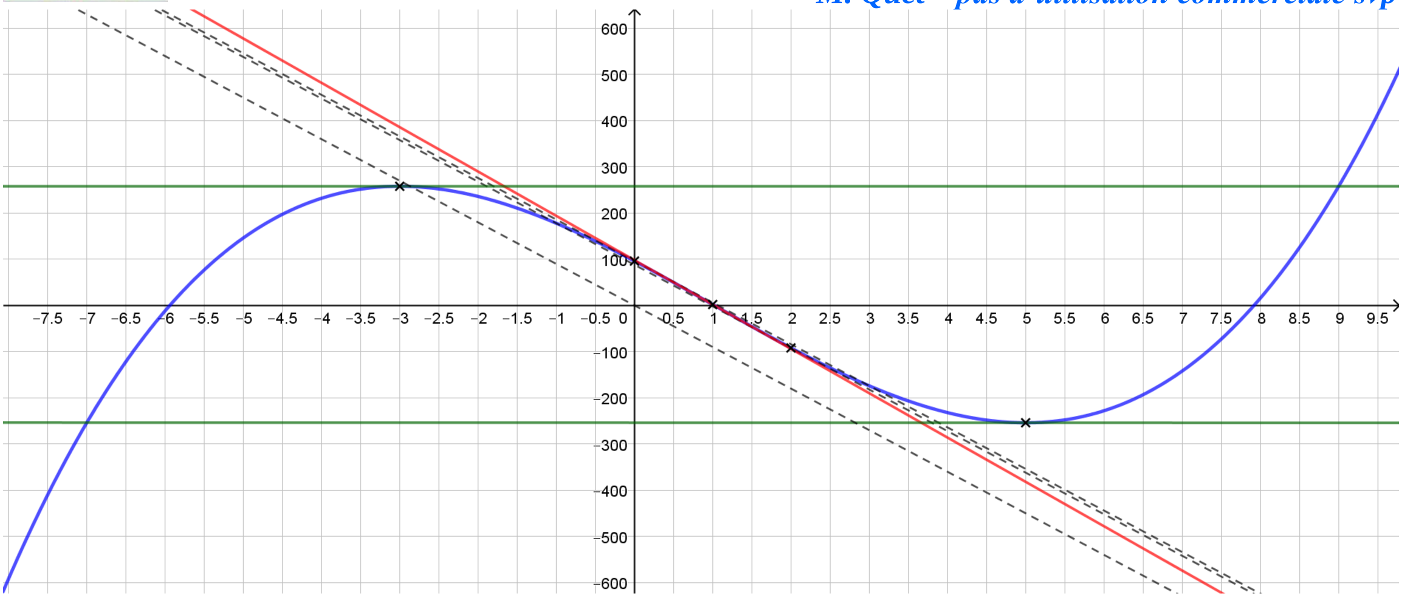
d) *Déterminer les abscisses pour lesquelles la courbe C_f admet des tangentes parallèles à la droite d'équation : $y=-90x$.*

Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur, on doit donc résoudre l'équation :

$$f'(x)=-90$$
$$\Leftrightarrow\ 6x^2-12x-90=-90$$
$$\Leftrightarrow\ 6x^2-12x=0$$
$$\Leftrightarrow\ 6x(x-2)=0$$

soit $x=0$, soit $x-2=0 \ \Leftrightarrow\ x=2$

Les tangentes parallèles à la droite d'équation $y=-90x$ sont définies aux points d'abscisses 0 et 2.


600
500
400
300
200
100
-100
-200
-300
-400
-500
-600
-7.5 -7 -6.5 -6 -5.5 -5 -4.5 -4 -3.5 -3 -2.5 -2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 9.5