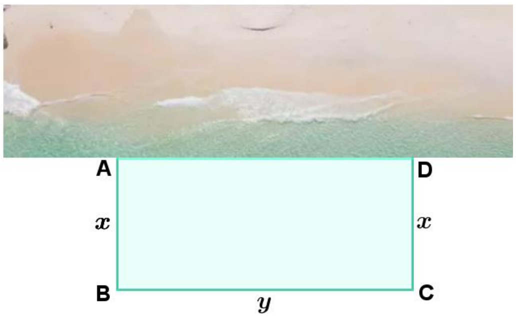
Problèmes d'optimisation

Exercice 8B.1



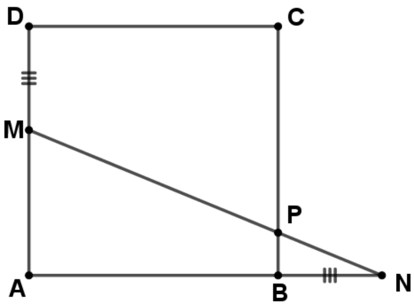
Un maître-nageur désire réaliser une zone de baignade rectangulaire en bord de plage, d'une aire égale à $392\ m^2$, à l'aide d'une corde et de quatre piquets.

1) Exprimer y en fonction de x.
2) En déduire la longueur de la corde en fonction de x.

On définit la fonction : $f(x) = 2x + \dfrac{392}{x}$ associée à la longueur de la corde.

3) Etudier la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et représenter son tableau de variation.
4) En déduire la longueur de corde minimale pour atteindre une aire égale à $392\ m^2$.
5) La corde coûte 5 € le mètre. Quel le coût minimal de la corde ?

Exercice 8B.2



On considère un carré ABCD de côté 1.

Soit M un point sur le segment $[\mathrm{AD}]$.

On place un point N sur la demi-droite $[\mathrm{AB})$, à l'extérieur du segment $[\mathrm{AB}]$, tel que : $\mathrm{DM} = \mathrm{BN}$.

La droite (MN) coupe le segment $[\mathrm{BC}]$ en un point P.

On pose : $\mathrm{DM} = \mathrm{BN} = x$ avec $0 \le x \le 1$.

Le but de l'exercice est de trouver la position du point M sur $[\mathrm{AD}]$ telle que la distance BP soit maximale.

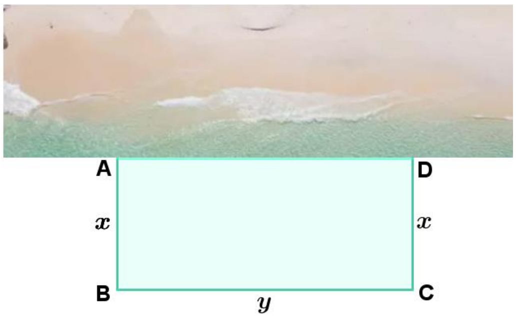
1) En utilisant le théorème de Thalès, déterminer la longueur BP en fonction de x.

On définit une fonction $f(x) = \dfrac{x - x^2}{1 + x}$ définie sur l'intervalle $[0;1]$.

2) Déterminer la dérivée de la fonction f puis étudier son signe.
3) Réaliser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.
4) Conclure.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier – M. Quet

Exercice 8B.1



Un maître-nageur désire réaliser une zone de baignade rectangulaire en bord de plage, d'une aire égale à $392\ m^2$, à l'aide d'une corde et de quatre piquets.

1) *Exprimer y en fonction de x.*

L'aire du rectangle est égale à $x \times y$, donc :

$$x \times y = 392 \iff y = \frac{392}{x}.$$

2) *En déduire la longueur de la corde en fonction de x.*

La longueur de la corde est :

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CD} = 2x + y = 2x + \frac{392}{x}.$$

On définit la fonction : $f(x) = 2x + \dfrac{392}{x}$ associée à la longueur de la corde.

3) *Etudier la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et représenter son tableau de variation.*

La dérivée de la fonction f est :

$$f'(x) = 2 + 392 \times \frac{-1}{x^2} = 2 - \frac{392}{x^2} = \frac{2x^2 - 392}{x^2}$$

Signe de la dérivée sur l'intervalle $]0;+\infty[$, sachant que $x^2 > 0$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{2x^2-392}{x^2} > 0 \iff 2x^2 - 392 > 0 \iff 2x^2 > 392 \iff x^2 > \frac{392}{2}$$

$$\iff x^2 > 196 \iff x > 14 \quad \text{sur l'intervalle }]0;+\infty[.$$

x	0		14		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	56	$\nearrow$	

$$f(14) = 2 \times 14 + \frac{392}{14} = 28 + 28 = 56$$

4) *En déduire la longueur de corde minimale pour atteindre une aire égale à $392\ m^2$.*

D'après ce qui précède, la longueur de la corde est minimale pour $x = 14$ mètres, donc :

$$y = \frac{392}{x} = \frac{392}{14} = 28.$$

La longueur minimale de la corde est donnée par $f(14) = 56$ mètres.

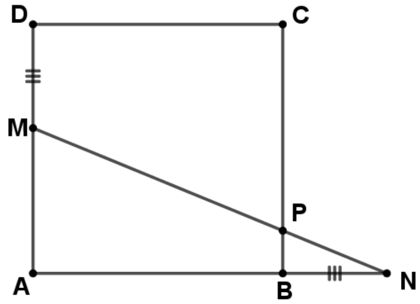
5) *La corde coûte 5 € le mètre. Quel le coût minimal de la corde ?*

Le coût minimal est :

$$56 \times 5 = 280 €.$$

Exercice 8B.2

On considère un carré ABCD de côté 1.
Soit M un point sur le segment $[\mathrm{AD}]$.
On place un point N sur la demi-droite $[\mathrm{AB})$, *à l'extérieur du segment* $[\mathrm{AB}]$, *tel que :* $\mathrm{DM}=\mathrm{BN}$.
La droite (MN) *coupe le segment* $[\mathrm{BC}]$ *en un point P.*
On pose : $\mathrm{DM}=\mathrm{BN}=x$ *avec* $0\le x\le 1$.



Le but de l'exercice est de trouver la position du point M sur $[\mathrm{AD}]$ *telle que la distance BP soit maximale.*

1) *En utilisant le théorème de Thalès, déterminer la longueur BP en fonction de* x.

L'angle $\widehat{\mathrm{ANM}}$ est intercepté par les droites parallèles (BC) et (AD).

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{NA}}=\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NM}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AM}} \Leftrightarrow \frac{x}{1+x}=\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NM}}=\frac{\mathrm{BP}}{1-x} \Leftrightarrow \mathrm{BP}=\frac{x(1-x)}{1+x}=\frac{x-x^2}{1+x}$$

On définit une fonction $f(x)=\dfrac{x-x^2}{1+x}$ *définie sur l'intervalle* $[0;1]$.

2) *Déterminer la dérivée de la fonction* f *puis étudier son signe.*

On pose : $u(x)=x-x^2$ et $v(x)=1+x$

Donc : $u'(x)=1-2x$ et $v'(x)=1$

Ainsi : $$f'(x)=\frac{(1-2x)(1+x)-\left(x-x^2\right)\times 1}{(1+x)^2}=\frac{1+x-2x-2x^2-x+x^2}{(1+x)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(1+x)^2}$$

Pour tout $x\in[0;1]$, $(1+x)^2>0$.

Calcul du discriminant :

$$\Delta=(-2)^2-4\times(-1)\times 1=4+4=8$$, d'où deux racines :

$$x_1=\frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{2-2\sqrt{2}}{-2}=-1+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{2+2\sqrt{2}}{-2}=-1-\sqrt{2}$$

$a=-1$: la parabole est orientée vers le bas et :

$$f'(x)>0 \text{ si } x\in\left]-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right[$$

Donc : si $x\in\left[0;-1+\sqrt{2}\right[$: $f'(x)>0$

si $x\in\left[-1+\sqrt{2};1\right[$: $f'(x)<0$

3) *Réaliser le tableau de variation de la fonction* f *sur l'intervalle* $[0;1]$.

x	0		$-1+\sqrt{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↗	$0{,}172$	↘	0

$f(0)=f(1)=0$ et $f\left(-1+\sqrt{2}\right)=3-2\sqrt{2}\simeq 0{,}172$

4) *Conclure.*

La longueur BC maximale est $3-2\sqrt{2}\simeq 0{,}172$, obtenue pour $x=-1+\sqrt{2}\simeq 0{,}414$.