Exercices à prise d'initiative

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -16x^3 + 12x^2 - x + 14$$

On note *C* la courbe représentative de f, la tangente T_a à C en *a* et *d* la droite d'équation $y = -x - 4$. Pour quelle(s) valeur(s) de *a* la droite *d* est-elle parallèle à T_a ?

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 14$

On note C_f la courbe représentative de *f*, T_a la tangente à C_f en a et *d* la droite d'équation $y = -x - 4$.

Pour quelle(s) valeur(s) de *a* la droite T_a est-elle parallèle à *d* ?

Exercice 3

Déterminer l'équation d'une droite qui est à la fois tangente à la parabole $y = x^2$ et à l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 4

Pour quelles valeurs de b, la courbe représentant la fonction $f(x) = x^3 + bx^2 + 3x$ n'admet-elle qu'une seule tangente horizontale ?

Exercice 5

Pour quelles valeurs de a, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + 2x^2 + x - 1$ est-elle strictement croissante ?

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}$, a et b étant deux réels.

La tangente à la courbe représentant la fonction f au point d'abscisse 3 est : $y = 0x + 8$.

Déterminer a et b.

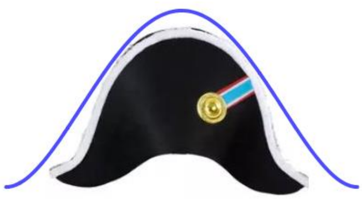
Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 2$.

1) Démontrer que $f'(x) = 4x(x-1)(x+4)$.
2) En déduire le tableau de signes de f' puis le tableau de variations de la fonction f sur $[0;1]$.
3) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 8 Chapeau Napoléon

Trouver une fonction polynôme définie sur un intervalle dont la courbe a l'allure suivante :



Exercice 1

Soit la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = -16x^3 + 12x^2 - x + 14$

On note C_f *la courbe représentative de f,* T_a *la tangente à* C_f *en a et d la droite d'équation* $y = -x - 4$.

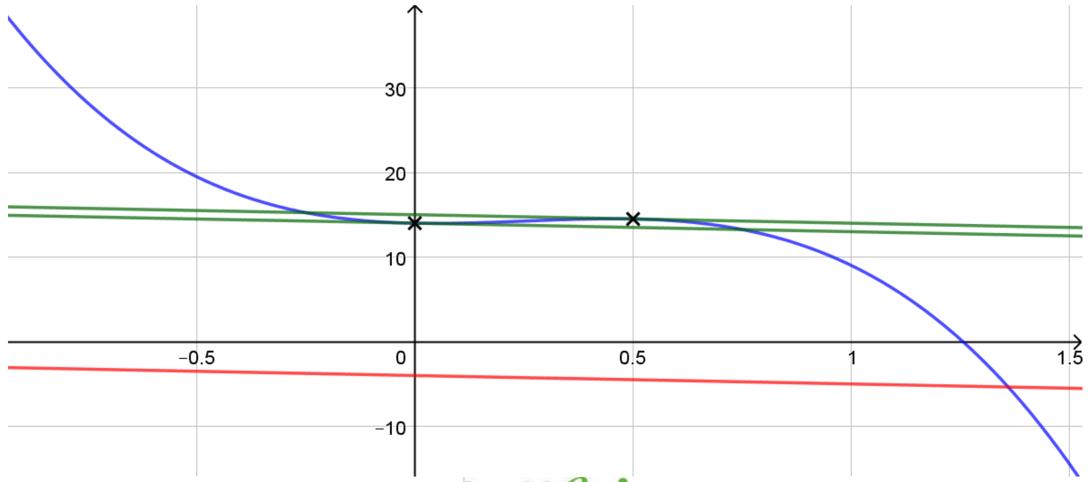
Pour quelle(s) valeur(s) de a la droite T_a *est-elle parallèle à d ?*

Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur et la dérivée est égale à la pente de la tangente en un point. On doit résoudre l'équation :

$$f'(x) = -1 \quad \text{avec} \quad f'(x) = -48x^2 + 24x - 1$$

Ainsi : $-48x^2 + 24x - 1 = -1 \iff -48x^2 + 24x = 0 \iff 24x(-2x+1) = 0$

Soit $x = 0$, soit $-2x + 1 = 0 \iff -2x = -1 \iff x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$



Exercice 2

Soit la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 14$

On note C_f *la courbe représentative de f,* T_a *la tangente à* C_f *en a et d la droite d'équation* $y = -x - 4$.

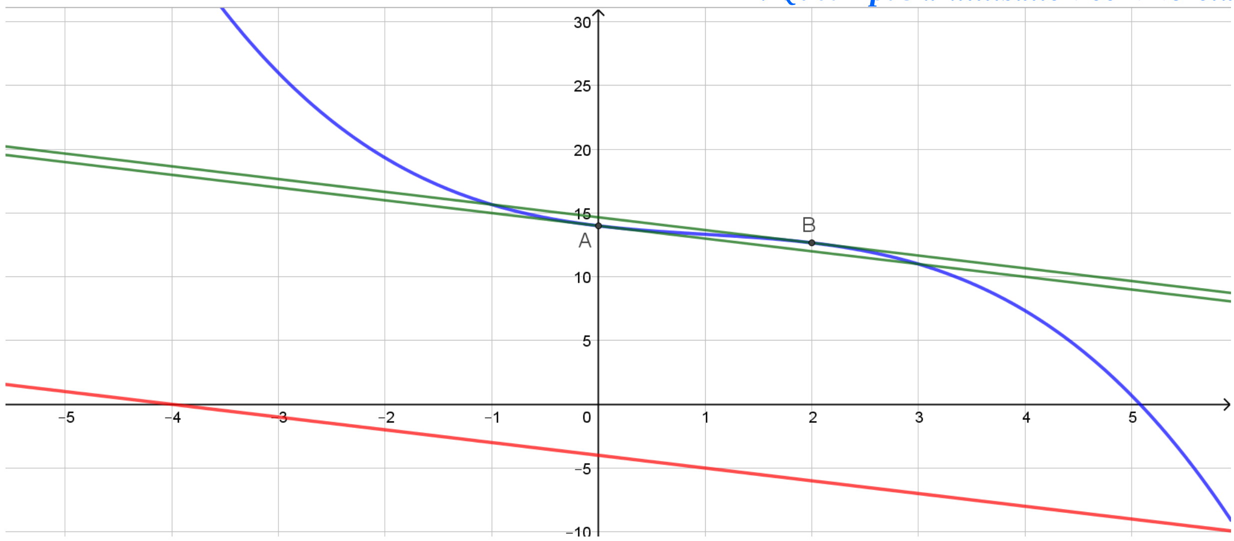
Pour quelle(s) valeur(s) de a la droite T_a *est-elle parallèle à d ?*

Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur et la dérivée est égale à la pente de la tangente en un point. On doit résoudre l'équation :

$$f'(x) = -1 \quad \text{avec} \quad f'(x) = -\frac{1}{6} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

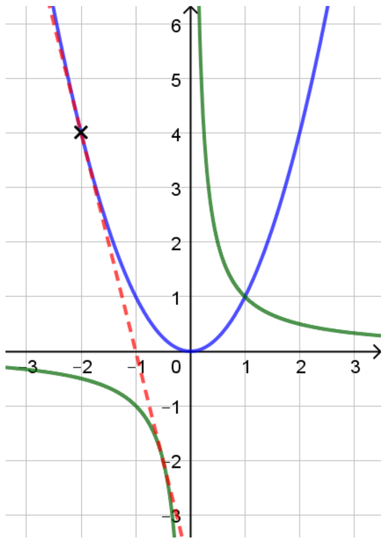
Ainsi : $-\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = -1 \iff -\frac{1}{2}x^2 + x = 0 \iff x\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = 0$

Soit $x = 0$, soit $-\frac{1}{2}x + 1 = 0 \iff -\frac{1}{2}x = -1 \iff x = -1 \times \left(\frac{-2}{1}\right) = 2$



Exercice 3

Déterminer l'équation d'une droite qui est à la fois tangente à la parabole $y=x^2$ et à l'hyperbole $y=\dfrac{1}{x}$.



Un schéma avec geogebra permet de mieux comprendre l'énoncé.

On pose $f(x)=x^2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(x)=2x$ et $g'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$.

Les tangentes à la parabole $y=x^2$ en un point d'abscisse a sont de la forme :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$
$$=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$$

Les tangentes à l'hyperbole $y=\dfrac{1}{x}$ en un point d'abscisse b sont de la forme :

$$y=g'(b)(x-b)+g(b)$$
$$=\frac{-1}{b^2}(x-b)+\frac{1}{b}=-\frac{1}{b^2}x+\frac{2}{b}.$$

Si ces tangentes sont confondues, on doit avoir, pour tout réel x :

$$2ax-a^2=-\frac{1}{b^2}x+\frac{2}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=-\dfrac{1}{b^2} \\ -a^2=\dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2} \\ -\left(-\dfrac{1}{2b^2}\right)^2=\dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2} \\ -\dfrac{1}{4b^4}=\dfrac{2}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2} \\ -\dfrac{1}{4\times 2}=\dfrac{b^4}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2} \\ -\dfrac{1}{8}=b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=-\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}=-2 \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La tangente commune a pour expression :

En prenant $a=-2$: $y=2\times(-2)x-(-2)^2=-4x-4$

En prenant $b=-\dfrac{1}{2}$: $y=-\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}x+\dfrac{2}{-\dfrac{1}{2}}=-4x-4$

Exercice 4

Pour quelles valeurs de b, la courbe représentant la fonction $f(x)=x^3+bx^2+3x$ n'admet-elle qu'une seule tangente horizontale ?

La fonction dérivée de la fonction f est :

$$f'(x)=3x^2+2bx+3$$

La courbe représentant la fonction f n'admet qu'une seule tangente horizontale si la dérivée f' ne s'annule qu'une seule fois, c'est-à-dire si le discriminant est nul :

$$\Delta=(2b)^2-4\times3\times3=4b^2-12$$

$$\Delta=0 \iff 4b^2-12=0 \iff 4b^2=12 \iff b^2=\frac{12}{4}=3$$

soit $b=\sqrt{3}$, soit $b=-\sqrt{3}$ → $S=\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$

Exercice 5

Pour quelles valeurs de a, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^3+2x^2+x-1$ est-elle strictement croissante ?

La fonction f est strictement croissante si sa dérivée est strictement positive :

$$f'(x)=3ax^2+4x+1$$

Etude d'une fonction du second degré :

$$\Delta=4^2-4\times3a\times1=16-12a$$

<u>1er cas :</u>

$$\Delta<0 \iff 16-12a<0 \iff -12a<-16 \iff a>\frac{-16}{-12} \iff a>\frac{4}{3}$$

Donc si $a>\frac{4}{3}$, la dérivée f' est du signe de $3a$ donc $f'(x)>0$ pour tout réel x et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>2ème cas :</u>

$\Delta=0 \iff a=\frac{4}{3}$: la dérivée devient : $f'(x)=3\times\frac{4}{3}x^2+4x+1=4x^2+4x+1=(2x+1)^2$

La dérivée est positive ou nulle mais elle ne s'annule qu'en un seul point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

La fonction dans ce cas est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

<u>3ème cas :</u>

$$\Delta>0 \iff 16-12a>0 \iff -12a>-16 \iff a<\frac{-16}{-12} \iff a<\frac{4}{3}$$

Il y aura deux racines : $x_1=\frac{-4-\sqrt{16-12a}}{2\times3a}=\frac{-2-\sqrt{4-3a}}{3a}$ et $x_2=\frac{-2+\sqrt{4-3a}}{3a}$

La fonction $f'(x)=3ax^2+4x+1$ est du signe de $3a$ à l'extérieur des racines :

- Si $a\in\left]0;\frac{4}{3}\right[$: la dérivée est négative sur l'intervalle $\left]x_1;x_2\right[$
- Si $a=0$: la dérivée s'écrit : $f'(x)=3\times0\times x^2+4x+1=4x+1$, négative sur $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[$
- Si $a\in\left]-\infty;0\right[$: la dérivée est négative sur l'intervalle $\left]-\infty;x_1\right[\cup\left]x_2;+\infty\right[$

Ainsi : La fonction f est strictement croissante si $a\geq\frac{4}{3}$.

Exercice 6

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ *par :* $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$, a *et* b *étant deux réels.*

La tangente à la courbe représentant la fonction f *au point d'abscisse 3 est :* $y=0x+8$.

Déterminer a *et* b.

Dérivée de la fonction f : on pose : $u(x)=x^2+ax+b$ et $v(x)=x-2$

donc : $u'(x)=2x+a$ et $v'(x)=1$

Ainsi : $$f'(x)=\frac{(2x+a)(x-2)-\left(x^2+ax+b\right)\times 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x+ax-2a-x^2-ax-b}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{x^2-4x-2a-b}{(x-2)^2}$$

L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 est donnée par :
$$y=f'(3)\times(x-3)+f(3)$$

Avec : $$f'(3)=\frac{3^2-4\times 3-2a-b}{(3-2)^2}=\frac{9-12-2a-b}{1^2}=-3-2a-b$$

Et : $$f(3)=\frac{3^2+3a+b}{3-2}=9+3a+b$$

L'équation de la tangente s'écrit :
$$y=(-3-2a-b)\times(x-3)+9+3a+b$$
$$=(-3-2a-b)x+9+6a+3b+9+3a+b$$
$$=(-3-2a-b)x+18+9a+4b$$

Or d'après l'énoncé, cette équation est :
$$y=0x+8$$

Par identification :
$$\begin{cases}-3-2a-b=0\\18+9a+4b=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=-3\\9a+4b=8-18=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a-3\\9a+4(-2a-3)=-10\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a-3\\9a-8a-12=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a-3\\a=-10+12=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\times 2-3=-7\\a=2\end{cases}$$

Ainsi : $a=2$ et $b=-7$.

Exercice 7

Soit la fonction f *définie sur* $[0;1]$ *par :* $f(x)=x^4+4x^3-8x^2+2$.

1) *Démontrer que* $f'(x)=4x(x-1)(x+4)$.

$$f'(x)=4x^3+12x^2-16x$$

et $$4x(x-1)(x+4)=\left(4x^2-4x\right)(x+4)=4x^3+16x^2-4x^2-16x=4x^3+12x^2-16x$$

donc : $$f'(x)=4x(x-1)(x+4)$$

2) *En déduire le tableau de signes de* f' *puis le tableau de variations de la fonction* f *sur* $[0;1]$.

$\forall x\in[0;1]$, $4x\geq 0$, $x-1\leq 0$ et $x+4>0$

Donc la dérivée est négative ou nulle sur l'intervalle $[0;1]$.

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
f	2	$\searrow$	-1

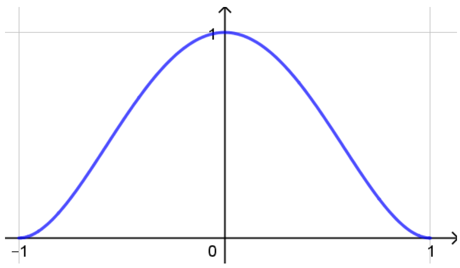
3) *Déterminer le nombre de solutions de l'équation* $f(x)=0$.

La fonction f est continue (chapitre de terminale) et strictement décroissante avec $f(0)=2$ et $f(1)=-1$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;1]$.

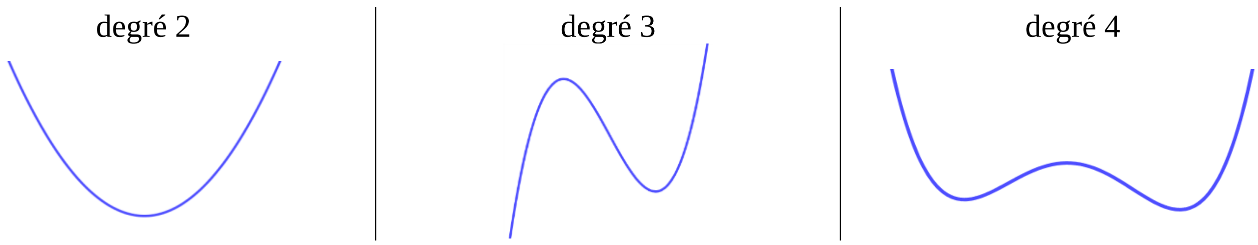
Exercice 8 Chapeau Napoléon

Trouver une fonction polynôme définie sur un intervalle dont la courbe a l'allure suivante :

On va s'intéresser à une configuration simple avec trois tangentes horizontales en -1, 0 et 1 :



Voici ci-dessous les allures des polynômes selon leur degré :



On va chercher une fonction polynômiale de degré 4 dont l'expression est de la forme :

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

En sachant que :

$$f(-1)=f(1)=0 \quad \text{et} \quad f(0)=1$$

et $$f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$$

La relation $f(0)=1$ donne :

$$0^4+a\times 0^3+b\times 0^2+c\times 0+d=1 \iff d=1$$

La relation $f(-1)=f(1)=0$ donne :

$$\begin{cases} 1^4+a\times 1^3+b\times 1^2+c\times 1+1=0 \\ (-1)^4+a\times(-1)^3+b\times(-1)^2+c\times(-1)+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+a+b+c+1=0 \\ 1-a+b-c\times+1=0 \end{cases}$$

En ajoutant les deux lignes, on obtient :

$$2+2b+2=0 \iff 2b=-4 \iff b=-2$$

En soustrayant les deux lignes, on obtient :

$$2a+2c=0 \iff c=-a$$

La fonction f s'écrit :

$$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1$$

Sa dérivée est :

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 - 4x - a$$

La relation $f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0$ donne :

$$\begin{cases} 4\times 0^3 + 3a\times 0^2 - 4\times 0 - a = 0 \\ 4\times 1^3 + 3a\times 1^2 - 4\times 1 - a = 0 \\ 4\times(-1)^3 + 3a\times(-1)^2 - 4\times(-1) - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 4 + 3a - 4 - a = 0 \\ -4 + 3a + 4 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = 0$$

La fonction f cherchée est : $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.